UNIVERSIDADE DO EXTREMO SUL CATARINENSE - UNESC
PÓS-GRADUAÇÃO *LATO SENSU* - ESPECIALIZAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ANA PAULA COLONETTI MARTINS

UMA ANÁLISE DO ENSINO DAS OPERAÇÕES COM NÚMEROS RELATIVOS

CRICIÚMA
2013

ANA PAULA COLONETTI MARTINS

UMA ANÁLISE DO ENSINO DAS OPERAÇÕES COM NÚMEROS RELATIVOS

Monografia apresentada ao Setor de Pós-graduação da Universidade do Extremo Sul Catarinense- UNESC, para a obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Orientadora: Prof.ª Msc. Eloir Fátima Mondardo Cardoso

CRICIÚMA

2013

Aos meus queridos Luzia e Leonardo, que estão sempre comigo e me apoiam. À Eloir, que com dedicação e paciência me orientou desde o início da elaboração desta pesquisa. A Deus, por permitir tudo isso. MUITO OBRIGADA!

RESUMO

O objeto de estudo da presente investigação é a prática pedagógica dos professores da Rede Municipal de Ensino de Criciúma (RMEC), referente o ensino das operações fundamentais da matemática no conjunto dos números relativos. A escolha do tema se deu em função do grande percentual de alunos com rendimento insuficiente neste conceito. A hipótese é que a prática pedagógica tem um papel essencial no ensino de conceitos matemáticos. Os pressupostos que deram sustentação ao processo da investigação foram da Teoria Histórico-Cultural, pois entendemos que a escola precisa difundir o conhecimento científico. A modalidade de pesquisa utilizada foi análise de conteúdo, por se constituir uma técnica que permite a descrição, análise e interpretação qualitativa. Os dados para análise foram obtidos por meio de entrevista semiestruturada, realizada com quatro professores da RMEC. Nomeamos para análise três categorias: “Situações do Cotidiano e Materiais Manipuláveis”, “A Reta Numérica” e “Operações com Números Relativos”. Os professores entrevistados, baseiam-se principalmente em conhecimento empírico, tais como: situações do dia-a-dia (temperaturas, saldos de gols, dívidas, entre outros) e materiais manipuláveis (cartões, tampinhas, régua numerada, entre outros). A proposição é que o número real, enquanto resultado da comparação entre grandezas, permeie a elaboração do conceito de número relativo ao se considerar as quantidades contínuas. De acordo com Rosa (2012), é na reta numérica que se objetiva o conceito de número real geometricamente, algebricamente e aritmeticamente. Tal representação concebe o zero origem, que indica a infinidade de números à sua direita, positivos, e à sua esquerda, negativos (CARAÇA, 1984; GLAESER, 1981; D’AUGUSTINE, 1976).

Palavras-chave: Conjunto dos números relativos. Reta numérica. Operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UNESC	Universidade do Extremo Sul Catarinense
GPEMAHC	Grupo de Pesquisa em Educação Matemática na Abordagem Histórico-Cultural
RMEC	Rede Municipal de Ensino de Criciúma

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Iniciamos a graduação no curso de Licenciatura em Matemática em virtude da identificação que tivemos com a disciplina nas experiências anteriores, embora ainda não havíamos escolhido a docência como atividade profissional. No entanto, no decorrer do curso, principalmente na disciplina de Estágio Supervisionado I, percebeu-se, devido às discussões referentes à Teoria Histórico-Cultural, que a Educação Matemática se tornaria o foco principal de nossa atividade de trabalho. A Educação Matemática nesta perspectiva requer:

> o entendimento de que o processo de produção do saber matemático é resultado de necessidades do sujeito compreender e atuar em seu mundo e, ao mesmo tempo, constituir-se como ser humano. Portanto, o conhecimento matemático deixa de ser uma qualidade interna do espírito humano, como apregoam as concepções idealistas, bem como uma relação de causa e efeito, anunciada pelas teorias mecanicistas (CRICIÚMA, 2008, p.168).

Embora as discussões no decorrer do curso de graduação tenham sido significativas, os pressupostos desta teoria não se esgotaram, pelo contrário, se mostraram mais acirrantes. Por este motivo, houve a imprescindibilidade de aprofundamento teórico, que implicaria no ingresso em curso de Especialização que atendesse tal necessidade.

No período que antecedeu o ingresso no curso de Pós-Graduação, participou-se do movimento de reformulação da Proposta Curricular da Rede Municipal de Ensino de Criciúma[1]. Vale salientar que a referida proposta tem seus fundamentos na Teoria Histórico-Cultural, fomentando a necessidade de intensificar os estudos.

Posteriormente, além da função administrativa, exercemos também a função docente na Rede Municipal de Ensino, ocasião que facilitou a participação na formação continuada da Proposta Curricular. Com as discussões levantadas no decorrer da formação, vislumbramos um novo olhar sobre a Educação Matemática.

Na continuidade do processo de formação docente, ocorreu o ingresso no curso de Especialização em Educação Matemática, ofertado pela UNESC. A escolha

[1] Nesta ocasião ainda não éramos professores, trabalhávamos no Setor Administrativo da Secretaria Municipal de Educação de Criciúma.

se deu em função da confiabilidade na Universidade e no seu corpo docente, conhecidos desde a graduação, bem como os demais docentes convidados. Logo, tivemos a disciplina "Tendências Atuais em Educação Matemática", ministrada pela Prof.ª Dra. Josélia Euzébio da Rosa[2].

Após esta disciplina, outras contempladas na grade curricular trouxeram discussões significativas, colocando-nos cada vez mais no caminho esperado. Na segunda disciplina do curso, "A Produção do Conhecimento e a Pesquisa em Educação", concluímos o projeto de pesquisa. Apesar de seguirmos outros caminhos, a elaboração do referido projeto auxiliou a escrita e conclusão deste trabalho monográfico.

Atualmente, lecionamos na Rede Municipal de Ensino de Criciúma (RMEC), com as turmas de sexto e sétimo ano do Ensino Fundamental. Na atuação, encontramos dificuldades para a elaboração conceitual de certos conteúdos. Tais dificuldades nos levaram a buscar, por meio de estudos e pesquisas, alternativas que pudessem minimizá-las. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), um dos objetivos da pesquisa em Matemática é a melhoria, tanto da qualidade do ensino, quanto da aprendizagem da Matemática. Considerando que o processo de formação do professor é contínuo, a pesquisa deve fazer parte da sua prática, pois é:

> um processo de estudo que consiste na busca disciplinada/metódica de saberes ou compreensões acerca de um fenômeno, problema ou questão da realidade ou presente na literatura o qual inquieta/instiga o pesquisador perante o que se sabe ou diz a respeito (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p.60).

Dentre os conteúdos e conceitos matemáticos, elegemos o conjunto dos números relativos[3], como foco de estudo de nossa investigação, por considerarmos enquanto professores da Educação Básica, um tema de difícil elaboração conceitual. Optamos por investigar e analisar como se dá o ensino das operações com números relativos por professores de Matemática da RMEC. O motivo relevante que levou à

---

[2] Doutora em Educação, linha de pesquisa Educação Matemática, pela Universidade Federal do Paraná. Membra do GEPEMAHC – Grupo de Pesquisa em Matemática na Abordagem Histórico-Cultural.

[3] O termo "relativos" se refere aos números positivos e negativos no campo dos números reais. Este termo também é encontrado na bibliografia e nos livros didáticos de matemática como negativos ou inteiros. Porém, optamos por utilizar a denominação empregada por Caraça (1984), números relativos, por acreditarmos que ela expresse melhor o que pretendemos abordar neste trabalho monográfico.

escolha do tema foi o percentual elevado de alunos com rendimento insuficiente na apropriação das significações destas operações.

Ao identificar estas dificuldades e para contextualizar o problema da investigação, fez-se necessário buscar na literatura como o conceito de Número Relativo se desenvolveu historicamente, a fim de compreender as razões de tais dificuldades, historicamente relacionadas com os números negativos.

Schubring (2000), Glaeser (1981), Berlinghoff e Gouvêa (2010), Sá e Anjos (2011) ao apresentarem os resultados de suas pesquisas, afirmam que os números negativos passaram por um longo processo de desenvolvimento até a sua aceitação. Somente no século XIX "os números negativos conquistaram condição de igualdade com os números positivos" (GLAESER, 1981, p.26). Os autores concordam que a não aceitação dos números negativos está relacionado ao fato de que eram considerados empiricamente[4] como ganhos e perdas. A este cenário, Glaeser (1981) chama de Modelo Comercial, considerando-o um obstáculo para a compreensão de propriedades multiplicativas.

Os livros didáticos apresentam o conceito de números relativos associado a situações do dia-a-dia, no entanto, o atual ensino dos Conjuntos Numéricos pelos professores entrevistados é desenvolvido conforme a ordem histórico-cronológica:

> Da realidade prática, por meio da medida e da contagem, a humanidade tirou a ideia dos números naturais e racionais, depois, produziu todas as consequências: os irracionais, para resolver o problema teórico da medida, e, por último, os números relativos para resolver o problema das grandezas que podem ser tomadas em dois sentidos opostos, concluindo o campo relativo, tradicionalmente conhecido como o campo dos reais (ROSA, 2012, p.27).

As grandezas contínuas (comprimento, volume, área, massa) devem conduzir o processo de ensino, pois possibilitam a compreensão de todos os tipos de número real: naturais, racionais, inteiros, irracionais e como a humanidade se apropriou do conceito de número na sua maior complexidade, o ensino de qualidade é aquele que contempla as significações do número real (DAVIDOV, 1982 apud ROSA, 2012).

Não obstante às dificuldades causadas pelo ensino fragmentado, em que

[4] Empírico aqui, considerado enquanto o conhecimento imediato, resultante da experiência.

cada conjunto numérico tem um momento específico a ser ensinado[5], temos outra questão a considerar, sendo esta: para minimizar as dificuldades dos alunos na compreensão da expansão dos números naturais, os professores utilizam "macetes" e "regras" pré-estabelecidas para facilitar a realização das operações matemáticas. A necessidade de alcançar boas notas leva os alunos a memorizarem estes macetes.

Segundo Rosa (2012, p.28), "É no conceito (números reais) que todas as operações fundamentais do cálculo são possíveis de serem realizadas". O que não ocorre na fragmentação apresentada nos livros didáticos brasileiros, que apresentam os conjuntos numéricos separados por ano de escolaridade. Além disso, trazem apenas a síntese da elaboração conceitual, omitindo o processo de elaboração dos conceitos, por ser considerado extenso.

A atual linguagem empregada pelos professores também causa dificuldades no processo de aprendizagem. Apesar do papel importante neste processo, a linguagem muitas vezes é equivocada, causa confusões semânticas e impossibilita a elaboração conceitual, pois:

> No contexto escolar, inúmeras vezes, a mesma linguagem pode ter significados muito diferentes, não só entre professor e alunos, mas também entre os alunos. A significação de cada enunciado é determinada na interação com as múltiplas vozes, seja perguntando, seja respondendo, repetindo, discordando, na busca da validação de argumentos (BATTIST; NEHRING, 2009, p. 61-62).

Elegemos as produções pedagógicas de professores da RMEC, a fim de buscar respostas ao problema de investigação, qual seja: Quais as limitações das produções pedagógicas de professores de Matemática no ensino das operações com números relativos no sétimo ano do Ensino Fundamental?

A investigação iniciou com a coleta de dados, realizada por meio de entrevista semiestruturada, direcionada a quatro professores da RMEC. As questões norteadoras da entrevista tinham o objetivo de identificar como os professores entrevistados elaboram conceitualmente as operações com números relativos com os alunos do Sétimo Ano do Ensino Fundamental. Para isso, procurou-se: analisar a

---

[5] Os livros didáticos brasileiros de matemática apresentam a seguinte sequência: até o 5º ano do ensino fundamental, conjunto dos números naturais. A partir do 6º ano, conjunto dos números racionais. Em seguida, no 7º ano, o conjunto dos números relativos, completando o conjunto dos números reais somente no 8º e 9º ano do ensino fundamental.

prática pedagógica destes professores; identificar as significações de cada operação (adição, subtração, multiplicação e divisão); analisar a linguagem utilizada no ensino; e apontar as dificuldades no ensino.

Os pressupostos que deram sustentação ao processo da investigação desde a coleta de dados até a análise do material foram da Teoria Histórico-Cultural, que "parte do princípio que a escola tem papel fundamental na difusão de conteúdos científicos" (CARDOSO, 2007, p. 45).

O presente trabalho monográfico foi organizado em dois capítulos. O primeiro capítulo apresenta a metodologia com a identificação dos sujeitos da investigação; o tipo de pesquisa; o instrumento de coleta dos dados; e a metodologia de análise. Os principais autores pesquisados foram: Bardin (1995), Moraes (1999), Franco, (2008) e Triviños (1987).

No segundo capítulo, discutimos três categorias de análise provenientes do método de pesquisa: situações do cotidiano e materiais manipuláveis; a reta numérica; e operações com números relativos (adição e subtração; multiplicação e divisão). Os referenciais adotados foram: Rosa (2012), Saviani (1991), Giardinetto (1999), Duarte (2007), Criciúma (2008), Vigotski (2001), Caraça (1984), Glaeser (1985) e D'Augustine (1976).

2 METODOLOGIA

O presente estudo foi realizado com quatro professores de Matemática do Ensino Fundamental, pós-graduados em nível de especialização *lato sensu*, atuantes na Rede Municipal de Ensino de Criciúma. O tempo de serviço dos referidos professores no Magistério, especificamente na disciplina de Matemática, varia entre cinco e vinte e dois anos.

A pesquisa é qualitativa, sendo assim, não tem como objetivo apenas constatar a realidade, qual sejam, as dificuldades no ensino e aprendizagem das operações com números relativos. A investigação pretende também interpretar de que maneira as dificuldades se constituem como elemento determinante da prática pedagógica dos professores entrevistados. E vai "além de uma visão relativamente simples, superficial, estética" (TRIVIÑOS, 1987, p. 130), pois a pesquisa qualitativa:

> tem suas raízes, a princípio, nas práticas desenvolvidas pelos antropólogos e pelos sociólogos em seus estudos sobre a vida em comunidade, posteriormente, este método passou a ser utilizado nas pesquisas educacionais. Seu surgimento é fruto da percepção dos pesquisadores antropológicos de que as informações coletadas da vida dos povos, organizadas em gráficos estatísticos, era simplesmente uma constatação da realidade e pouco contribuía para a intervenção social. Como conseqüência, passaram a interpretar os dados de forma mais ampla, sem privilégio dos dados quantitativos (CARDOSO, 2007, p.53).

Utilizou-se a metodologia de análise de dados qualitativos, denominada análise de conteúdo, cujos fundamentos, matéria prima e objetivos, obedecem a "um conjunto de passos segundo os quais pode ser concebida e aplicada" (MORAES 1999, p.6).

Dos diferentes tipos de instrumentos de coleta de dados, optou-se pela entrevista semiestruturada[6]. Ela possibilita ao entrevistado expor de forma ampla seus pensamentos e permite o acúmulo de dados empíricos para análise. Para Triviños (1987), a entrevista semiestruturada é usada na pesquisa qualitativa por ser uma das técnicas de coleta de informações que "considera a participação do sujeito como um dos elementos de seu fazer científico"[7]. Desta forma, o entrevistado fornece as informações com liberdade e espontaneidade e torna a investigação mais rica. O autor salienta que a entrevista semiestruturada é um instrumento decisivo

---

[6] Roteiro da Entrevista no Apêndice A.
[7] Idem, p.138.

"para estudar os processos e produtos nos quais está interessado o investigador qualitativo"[8].

Para tal, partiu-se de questionamentos específicos acerca do sistema conceitual em estudo, em relação à compreensão espontânea dos professores sobre as características das operações com números relativos. Em seguida, questionou-se sobre a metodologia e recursos utilizados no planejamento das aulas. E por fim, os professores foram incitados a relatarem suas dificuldades no processo de ensino e as dificuldades dos seus alunos na apropriação das operações com números relativos.

O roteiro da entrevista foi elaborado com base na experiência das pesquisadoras em sala de aula e nas leituras que possuem sobre a Teoria Histórico-Crítica. Os pressupostos dessa teoria nortearam a presente investigação, com vistas a extrair elementos da elaboração conceitual no trabalho pedagógico dos professores. Tais questões possibilitaram novas perguntas, uma vez que na utilização deste instrumento/técnica de coleta de dados, "o informante, seguindo espontaneamente a linha de seu pensamento e de suas experiências dentro do foco principal colocado pelo investigador, começa a participar na elaboração do conteúdo da pesquisa" (TRIVIÑOS, 1987, p.146).

Conforme dito anteriormente, para interpretação dos dados empíricos, optou-se pelo método de análise de conteúdo, que se constitui, nas palavras de Bardin (1995, p.42), como:

> Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens.

Triviños (1987) destaca esse método no campo das pesquisas qualitativas e ressalta a importância da inferência[9] nos conteúdos da mensagem. Para chegar efetivamente à inferência, é necessário que o pesquisador domine os conceitos básicos das teorias que alimentam o conteúdo das mensagens, uma vez que:

---

[8] Idem, p.138.
[9] Também conhecida como interpretação por Moraes (1999).

> o método de análise de conteúdo, em alguns casos, pode servir de auxiliar para instrumento de pesquisa de maior profundidade e complexidade, como o é, por exemplo, o método dialético. Neste caso, a análise de conteúdo forma parte de uma visão mais ampla e funde-se nas características do enfoque dialético (TRIVIÑOS, 1987, p.160).

O método de análise de conteúdo tem como ponto de partida “a mensagem, seja ela verbal (oral ou escrita), gestual, silenciosa, figurativa, documental ou diretamente provocada” (FRANCO, 2008, p.21). Para a autora, a análise e a interpretação de qualquer conteúdo resultante destes tipos de mensagem são passos a serem seguidos, quantitativamente e qualitativamente falando. Para que esse processo tenha sucesso, “a contextualização deve ser considerada como um dos principais requisitos, e mesmo como o pano de fundo para garantir a relevância dos sentidos atribuídos às mensagens” (FRANCO, 2008, p.16-17).

Moraes (1999, p.14) apresenta cinco etapas concebidas no processo da análise de conteúdo: preparação das informações, unitarização ou transformação do conteúdo em unidades, categorização ou classificação das unidades em categorias, descrição e interpretação.

Após a coleta dos dados de análise, caracterizada pela transcrição das mensagens contidas nas entrevistas, iniciou-se a primeira das cinco etapas propostas por Moraes (1999) no método da análise de conteúdo: a preparação das informações. O método sugere que:

> Para que a informação seja acessível e manejável, é preciso tratá-la, de modo a chegarmos a representações condensadas (análise descritiva do conteúdo) e explicativas (análise do conteúdo), veiculando informações suplementares adequadas ao objectivo a que nos propusemos (BARDIN, 1995, p.52).

Nesta etapa, a transcrição das quatro entrevistas foi relida com foco no objeto de estudo: as produções pedagógicas de professores no ensino das operações com números relativos. Os professores foram identificados pela palavra Professor, seguida dos números de 1 a 4, conforme a ordem cronológica das entrevistas.

Na etapa de unitarização, identificamos a unidade de análise, que para Moraes (1999, p.16) “é o elemento unitário de conteúdo a ser submetido posteriormente à classificação” e a unidade de contexto que “é a unidade mais ampla que a de análise, a qual lhe serve de referência, fixando limites contextuais para interpretá-la. Geralmente, cada unidade de contexto contém diversas unidades de registro"[10].

Como unidade de contexto, elencamos: "As produções pedagógicas no ensino das operações com números relativos". E de acordo com a fala dos professores entrevistados, as unidades de análise foram: "Metodologia/prática pedagógica" e "Elaboração Conceitual".

Em seguida, iniciou-se o processo de categorização dos dados da comunicação, pertinente à terceira etapa. Neste momento, os dados foram agrupados considerando características comuns entre eles. Os critérios foram estabelecidos no decorrer do processo. Para Moraes (1999, p.19):

> A categorização é, portanto, operação de classificação dos elementos de uma mensagem, seguindo determinados critérios. Ela facilita a análise da informação, mas deve fundamentar-se em definição precisa do problema, dos objetivos e dos elementos utilizados na análise de conteúdo.

A criação das categorias de análise "é o ponto crucial da análise de conteúdo" (FRANCO, 2008, p.59), apesar de ser "um processo longo, difícil e desafiante"[11]. Exige do pesquisador muito esforço, pois:

> A *categorização* é uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto, por diferenciação e, seguidamente, por reagrupamento segundo o género (analogia), com os critérios previamente definidos. As categorias são rubricas ou classes, as quais reúnem um grupo de elementos (unidades de registro, no caso da análise de conteúdo) sob um título genérico, agrupamento esse efectuado em razão dos caracteres comuns destes elementos (BARDIN, 1995, p.117).

Elencou-se, dentre outras possíveis, três categorias de análise: "Situações do Cotidiano e Materiais Manipuláveis", "A Reta Numérica" e "Operações com Números Relativos (adição e subtração; multiplicação e divisão)".

Moraes (1999, p.23) indica a descrição como sendo a quarta etapa do processo de análise de conteúdo, na qual o resultado do trabalho começa ser comunicado: "É o momento de expressar os significados captados e intuídos nas

---

[10] Idem, p.18.
[11] Idem, p.59.

mensagens analisadas”[12]. No entanto, a etapa de descrição não é suficiente para que os resultados estejam completos.

Para que se complete a análise, faz-se necessário conhecer a última das cinco etapas propostas: a interpretação. Nesta etapa há a compreensão do conteúdo das mensagens constantes nas respostas obtidas na entrevista e nas informações ocultas pelos entrevistados (MORAES, 1999, p.25).

Diferentemente das demais, a quarta e a quinta etapas não podem ser apresentadas em síntese neste momento. Elas fazem parte do corpo da investigação e constarão no capítulo seguinte, intitulado “As Categorias de Análise”.

4 AS CATEGORIAS DE ANÁLISE

Na primeira categoria de análise, denominada “Situações do Cotidiano e Materiais Manipuláveis”, abordaremos uma questão presente na fala de todos os professores entrevistados: a relação entre números e quantidades. Destacaremos também o uso de materiais manipuláveis, em que os números são considerados empiricamente, enquanto tampinhas, cartões e outros objetos, restringindo-os às quantidades discretas no campo dos números naturais e inteiros.

A segunda categoria de análise relaciona a reta numérica com as operações de adição e subtração e intrinsecamente com as operações de multiplicação e divisão. Reafirmamos a importância do trabalho com a reta numérica para a elaboração do conceito de Número Real.

Na última categoria de análise, “Operações com Números Relativos”, as quatro operações fundamentais da Matemática: adição, subtração, multiplicação e divisão serão analisadas nas produções pedagógicas dos professores entrevistados.

Apesar da separação em categorias distintas, os dados por vezes estarão diretamente relacionados a mais de uma categoria, como veremos nas seções a seguir.

---

[12] Idem, p.24.

4.1 SITUAÇÕES DO COTIDIANO E MATERIAIS MANIPULÁVEIS

As situações do cotidiano e os materiais manipuláveis implicam no conhecimento empírico. O termo “empírico”, segundo Ferreira (1993, p.203) é algo “Baseado apenas na experiência, e não no estudo”. Davýdov (1998 apud CRICIÚMA, 2008) afirma que o pensamento empírico é importante na vida cotidiana, mas como o objetivo da vida escolar é o desenvolvimento do pensamento teórico, que não se desenvolve espontaneamente, o conhecimento empírico pode se tornar um obstáculo na aprendizagem.

O uso de situações cotidianas e de materiais manipuláveis no ensino pode ocorrer apenas na esfera empírica, ou pode avançar para a esfera não empírica, dependendo da abordagem que o professor adote:

> A ênfase apenas na representação visual das quantidades de objetos soltos, relacionados ao dia-a-dia das crianças ou não, reduz o conteúdo do conceito de número as suas significações empíricas, próprias do estágio inicial do desenvolvimento do conceito de número pela humanidade, em detrimento do conteúdo teórico, em seu estágio atual de elaboração (ROSA, 2012, p.230).

A seguir, analisaremos como o conhecimento empírico, expresso por meio de situações do cotidiano e materiais manipuláveis aparece na fala dos professores entrevistados, com a compreensão de que:

> o conhecimento no cotidiano é um conhecimento fragmentário que se manifesta segundo uma lógica conceitual que é própria às exigências de toda a vida cotidiana. Trata-se de uma lógica conceitual adequada aos objetivos prático-utilitários e que responde eficazmente às necessidades do cotidiano (GIARDINETTO, 1999, p.6).

Iniciamos pela fala do Professor 1, quando afirma que o ensino dos números negativos se dá na “vivência deles no dia-a-dia, do cotidiano deles. Como por exemplo, a temperatura, compras, contas bancárias, distâncias e panfletos de lojas e supermercados para trabalhar com eles, principalmente a compra, o troco, o dinheiro”.

As situações do cotidiano do aluno, temperaturas, saldos bancários e de gols, distâncias, perdas, ganhos, altitudes, profundidades, são situações reais de aplicação do conceito dos números relativos. Não constituem a elaboração conceitual necessária para o entendimento desse conjunto numérico, suas especificidades e operações, portanto, pertencem à esfera do conhecimento empírico. Tais situações se apresentam nos livros didáticos utilizados pelos professores entrevistados[13], como o conceito de Número Relativo a ser ensinado. O intuito é que os alunos aprendam as significações deste conceito ao identificarem estes números em seu dia-a-dia. No entanto, o papel da escola é a socialização do saber sistematizado, elaborado historicamente, não fragmentado, que exprime a cultura erudita e não a popular (SAVIANI, 1991, p.103).

A fala do Professor 1 não é isolada. Os demais professores entrevistados compartilham da mesma ideia:

> Eu costumo trabalhar com números menores, aquela parte mais bancária, de eu tenho tanto no banco, faço um depósito de tanto, ou retiro tanto, quanto é que vai restar. Ou com temperatura. Tantos graus, caiu tantos graus, com números pequenos pra eles irem sabendo diferenciar e como chegar (PROFESSOR 2).
>
> Usar claro, os exemplos de saldos de banco, saldos de gols começa a fazer sentido pra eles. Aquele básico, temperatura, usar esses exemplos básicos do livro, mas com mais calma (PROFESSOR 3).
>
> Eu uso a partir do cotidiano. Exploro situações em que parte tudo da adição. Tipo perda, ganho, saldo bancário, verificação de temperaturas, altitude, profundidade, saldos de gols (PROFESSOR 4).

Como afirma Glaeser (1981, p.64) "o <u>modelo comercial</u> dos ganhos e dívidas é um obstáculo à compreensão das propriedades multiplicativas" (grifo do autor). Baseando-nos nesta afirmação, aventuramo-nos a afirmar que assim como o uso do modelo comercial, a utilização de saldo de gols, temperaturas, altitudes, também serão obstáculos no ensino da operação de multiplicação e por consequência, da operação de divisão.

Giardinetto (1999) afirma que na vida cotidiana o indivíduo se apropria de fragmentos de um conhecimento sistematizado que é desenvolvido no contexto histórico-social do qual ele faz parte. Uma apropriação parcial, que permite apenas que ele cumpra determinada atividade que necessita desenvolver nas relações sociais de exploração, garantindo o mínimo de força de trabalho necessário para essa atividade.

Neste sentido, ao aprender os números relativos e as operações que os envolvem a partir das situações cotidianas, baseados no conhecimento empírico, os

---

[13] Giovanni Jr. e Castrucci (2009); Bonjorno e Ayrton (2006) e Souza e Pataro (2009).

alunos deixam de se apropriar do saber historicamente produzido e não compreendem este conjunto numérico como parte de um todo real.

O autor acrescenta que esses fragmentos de conhecimento possuem uma lógica conceitual adequada aos objetivos prático-utilitários e que responde às necessidades do cotidiano, mas o acesso ao conhecimento sistematizado é imprescindível para a própria transformação da vida cotidiana, possibilitando a apropriação do saber historicamente acumulado para que o indivíduo se torne cada vez mais um ser social:

> a escola surge como um elemento fundamental para a necessária formação do indivíduo enquanto cidadão participante de um determinado contexto social, pois é através dela que esse indivíduo tem a possibilidade de se apropriar de um conhecimento que não lhe é possível apropriar ao plano da vida cotidiana (GIARDINETTO, 1999, p.8).

A escola tem o papel de possibilitar o acesso das novas gerações ao mundo do saber sistematizado, metódico, científico. Não deve reiterar a cultura popular, pois para isso o povo não precisa de escola, desenvolve por si mesmo, por meio de suas lutas, relações e práticas. Porém, sem a apropriação do saber escolar historicamente acumulado, o cidadão não tem condições de participar das escolhas em sociedade e ficará sempre marginalizado, uma vez que "o desenvolvimento do indivíduo não se efetiva plenamente se sua vida se realizar à esfera do cotidiano" (DUARTE, 2007, p.38).

Os alunos frequentam a escola não para legitimar os saberes de que já conseguiram se apropriar na informalidade, mas para ter acesso aos saberes que não são capazes de sistematizar sozinhos. (GIARDINETTO, 1999).

A forma como os livros didáticos e os professores apresentam esse conjunto numérico para seus alunos, dificulta a elaboração conceitual necessária para a aprendizagem. Ao iniciarem o estudo por situações reais, apresentam a forma prática-utilitária dos números relativos, impedindo a compreensão das particularidades do conceito. Assim, os alunos somente compreenderão determinadas situações quando estiverem relacionadas com o seu dia-a-dia.

Para exemplificar: o que significa a adição ou a multiplicação de duas temperaturas negativas ou duas temperaturas positivas? Ou ainda, que relação há na adição ou multiplicação de dois saldos de gols negativos? Simples operações como a adição e a multiplicação não serão compreendidas se o ensino se fizer na esfera do cotidiano, apoiado em conhecimento empírico. Afinal de contas, operamos e identificamos as características dos números relativos, e não das temperaturas, dos saldos de gols, das altitudes, perdas e ganhos, entre outras. As operações matemáticas se realizam com o número e não com o que ele representa.

Fica claro na fala dos professores e nos livros didáticos brasileiros, a necessidade de relacionar o número com quantidades de objetos soltos, relativa à compreensão que o ensino deve ter uma sequência cronológica, qual seja: números naturais, racionais, irracionais, inteiros e reais. Por meio da medida e da contagem a humanidade se apropriou dos números naturais e racionais, consequentemente se apropriou dos demais números: irracionais, para resolver o problema teórico da medida e relativos, para compreender que as grandezas podem ser tomadas em dois sentidos distintos. Todos estes números são reunidos sob o conceito de Número Real (ROSA, 2012).

Os conceitos matemáticos são caracterizados por uma lógica de pensamento e "a proposição é que na organização da sequência de ensino, a base fundamental seja a relação entre o lógico e o histórico do conceito" (CRICIÚMA, 2008, p. 176).

O Professor 4 afirma que parte "da história, até para eles poderem entender como que surgiu. Podemos citar como exemplos os negócios de passagem dos comerciantes que faltava e colocavam menos, o quanto faltava, o quanto sobrava." Porém, a relação entre o lógico e o histórico se dá, quando o pensamento é elaborado segundo os critérios lógicos do desenvolvimento histórico (DUARTE 1987 apud CRICIUMA, 2008, p.176) e não apenas quando nos remetemos à História da Matemática simplesmente para ilustrar os fatos ocorridos.

Para a formação do conceito de número relativo, partiremos da situação-problema: a indicação do sentido de um deslocamento[14] (CARAÇA, 1984).

Indique a posição de um móvel que parte da origem O e desloca-se 3 unidades.

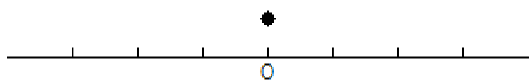


Ilustração 1
Fonte: Elaboração nossa, com base em Caraça (1984)

[14] Consideramos deslocamento enquanto um movimento na reta numérica, à direita ou à esquerda da origem.

Existem duas possibilidades de representar o deslocamento[15] resultante P:

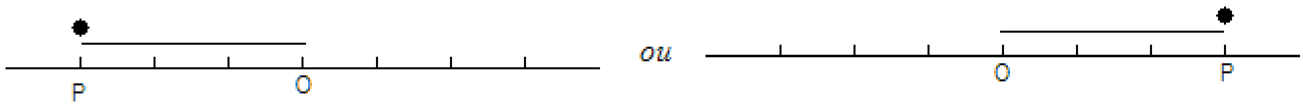


Ilustração 2
Fonte: Elaboração nossa, com base em Caraça (1984)

Para que a localização seja precisa, além de indicar o valor numérico do deslocamento, é necessário que se especifique o sentido que acontecerá. Considerando o deslocamento à direita da origem O, apresenta-se outra situação:

Indique a posição de um móvel que parte da origem O, desloca-se 3 unidades à direita e em seguida duas unidades à esquerda:

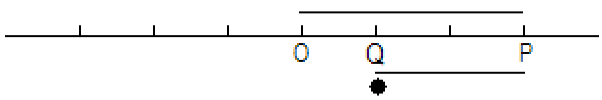


Ilustração 3
Fonte: Elaboração nossa, com base em Caraça (1984)

O deslocamento resultante Q é conhecido, pois pertence aos números positivos. Equivale a uma unidade. Porém é proposta outra situação:

Indique a posição de um móvel que parte da origem O, desloca-se 3 unidades à direita e em seguida quatro unidades e meia à esquerda.

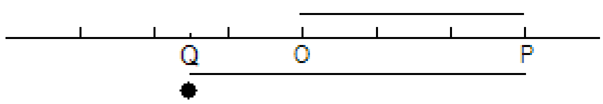


Ilustração 4
Fonte: Elaboração nossa, com base em Caraça (1984)

O deslocamento final da ilustração 4 é representado pelo ponto Q. Ele representa uma unidade e meia localizada antes do zero. Este resultado não pertencente aos campos numéricos já conhecidos.

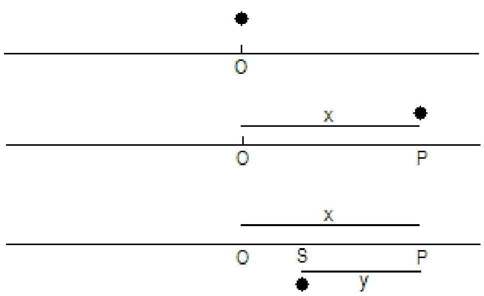
[15] Diz-se do movimento na reta numérica, que será retomado na categoria de análise: Operações com Números Relativos, item 4.3.

Para Caraça (1984), certas grandezas são possíveis de ser tomadas em dois sentidos opostos, tendo-se sempre um marco como origem. Quando se quer indicar a posição de um determinado ponto que consideramos movimentar-se em uma trajetória retilínea, saído de uma posição inicial, entre outras coisas, precisamos saber em qual dos dois sentidos opostos da reta o movimento se realiza.

Para ilustrar, utilizamos o exemplo: um móvel tem tal velocidade que percorre uma unidade por segundo em uma reta R, de origem O. Após *x* segundos, ele terá percorrido *x* unidades, alcançando um ponto P. No entanto, não sabemos ao certo onde o móvel se localiza: cinco unidades à direita ou à esquerda da origem O? É necessário juntarmos a *x* um sinal que indique qual é o sentido do movimento (da direita para à esquerda ou da esquerda para à direita), a fim de tornar conhecida sua localização.

Caraça (1984), afirma que o sinal indicativo do sentido pode ser qualquer um, mas é preciso que se tome um que todos consigam compreender, não importando a ocasião. Propõe que o sinal adotado será negativo (-) quando o sentido for da origem à esquerda e positivo (+) quando o sentido for da origem à direita.

Caraça (1984) considera ainda que ao fim de *x* segundos o móvel resolva mudar o sentido do seu movimento. Ele continua com a mesma velocidade durante mais *y* segundos (com *y* menor que *x*) e chega ao ponto S. Para encontrarmos a posição final do móvel, basta que da medida *x*, percorrida no primeiro movimento, subtraímos a medida *y*, do segundo movimento, na operação $x - y = z$. Em que *z* é a medida do resultado final do deslocamento. Podemos visualizar na ilustração 5 os deslocamentos *x* e *y*:



Neste caso, como não há nenhum sinal indicativo do sentido do movimento, optou-se por fazê-lo no sentido habitual, porém vale lembrar que o deslocamento poderia ter sido indicado em qualquer um dos dois sentidos.

Ilustração 5
Fonte: Elaboração nossa, com base em Caraça (1984)

Porém, quando *y* (que representa o segundo deslocamento) for maior do que o primeiro deslocamento *x*, essa operação só será possível se utilizarmos um campo numérico que possibilite resolver a operação.

O conceito de número relativo para Caraça (1984, p.92) é definido desta forma: "Sejam a e b dois números reais quaisquer: à diferença a – b chamaremos número relativo, que diremos positivo, nulo ou negativo, conforme for a > b, a = b, a < b." Sendo assim, quando *a* for maior que *b*, na diferença *a – b*, o resultado será um número relativo positivo. Porém, quando *b* for maior que *a*, utilizaremos a diferença *b – a*, precedida do sinal (-) para determinar o número relativo negativo. Os números positivos são reais incorporados ao novo campo (dos relativos) com uma qualificação nova:

> Ao conjunto de relações em que um determinado ser se encontra com os outros seres dum agregado chamaremos das *qualidades* desse ser [...] as qualidades dum ser dependem do meio em que ele se considera imerso – *a agregado novo, qualidades novas dos seres que o compõem.* O número 2 tem umas qualidades como membro do campo racional e outras como membro do campo real; tem agora outras como membro do campo relativo (CARAÇA, 1984, p. 98 – grifos do autor).

Diferentemente de Caraça (1984), o que ocorre nos livros didáticos utilizados pelos professores entrevistados, é a definição do conjunto dos números inteiros (e não dos números relativos), como sendo o conjunto formado pelos inteiros positivos, inteiros negativos e pelo zero. Reforça-se assim a ideia de grandeza discreta (tampinhas, cartões coloridos e réguas numeradas) no ensino dos números relativos.

Em relação à reta orientada[16], o autor observa que temos um ponto considerado como origem (ponto O) e dois sentidos opostos: da origem para a direita, o sentido positivo e da origem para a esquerda, o sentido negativo. Há correspondência biunívoca entre o conjunto dos pontos da reta orientada e o conjunto dos números relativos, "a todo o ponto à direita de *O* corresponde um número real positivo, e reciprocamente; a todo o ponto à esquerda de *O*, um número real negativo, e reciprocamente; ao próprio *O* corresponde o número *zero*" (CARAÇA, 1984, p.99 grifo do autor).

Após analisar a posição dos números nos dois sentidos da reta orientada, é possível definir a ordenação dos números relativos:

---

[16] Termo pelo qual o autor se refere à reta numérica.

> Dados dois números reais relativos *a* e *b*, aos quais correspondem biunivocamente os pontos *P* e *Q*, diz-se que é $a > b$, $a = b$ ou $a < b$ conforme *P* está à direita de *Q*, *P* coincide com *Q*, ou *P* está à esquerda de *Q* [...] de dois números positivos, é maior o que tiver maior valor absoluto; *qualquer* número positivo é maior que *qualquer* número negativo; de dois números negativos, é maior o que tiver menos valor absoluto. Quanto à *igualdade*, da definição dada acima resulta que dois números relativos são iguais sempre que têm o mesmo valor absoluto e o mesmo *sinal*; um mesmo número relativo pode, portanto, ser definido por uma infinidade de diferenças $p - q$ de números reais – exige-se apenas que não varie o sinal nem o valor absoluto da diferença. [...] Isto tem importância porque, dado um número negativo $p - q$, qualquer, se pode escrever, chamando *r* à diferença $q - p$: $p - q = 0 - r = - r$ (CARAÇA, 1984, p.100 – grifos do autor).

Assim, "todo número negativo, pode ser considerado como uma diferença em que o aditivo é zero e o subtractivo é o número real igual ao seu módulo" (CARAÇA, 1984, p.100), inserindo significado ao conceito de número negativo.

4.2 A RETA NUMÉRICA

Nesta categoria, analisaremos como ocorre o uso da reta numérica na sala de aula pelos professores entrevistados, baseando-nos em uma tese[17] que apresenta as proposições de Davidov[18] para o ensino de Matemática.

A dificuldade de compreensão pelos alunos do conceito de número negativo possivelmente é devida ao fato de considerarem o zero "sem valor", "nada" ou "nenhum objeto". É incompreensível a existência de algo que seja menor do que zero.

Para ilustrarmos tal obstáculo, tomaremos como exemplo a seguinte situação: Consideramos quantitativamente três laranjas. Se retirarmos três, teremos nenhuma laranja, ou seja, zero. É possível retirar mais laranjas? A insuficiência da relação entre quantidade e número fica explícita neste exemplo. As situações cotidianas, baseadas em conhecimento empírico, impedem a elaboração do conceito de número, neste caso, de número relativo.

Glaeser (1985, p.62) afirma que "Durante séculos os matemáticos se impressionaram com o *zero absoluto*, abaixo do qual nada se poderia conceber. Isto os impediu de manejar com facilidade o *zero origem*, marcado arbitrariamente sobre um eixo orientado" (grifos do autor). Na atualidade, a ênfase ainda é dada ao zero

---

[17] Tese de doutoramento (ROSA, 2012), com base nas proposições davidovianas.

[18] Psicólogo russo. Escreveu diversos livros, inclusive livros didáticos para o ensino fundamental. O livro do primeiro ano do ensino fundamental foi utilizado na tese de Rosa (2012). A aquisição e tradução do referido livro foi realizada pelo GEPMAHC – Grupo de Pesquisa em Matemática na Abordagem Histórico-Cultural.

absoluto, dificultando a compreensão do zero origem, indispensável para a aprendizagem dos números negativos.

O zero origem possui significado na reta numérica, que é utilizada por todos os professores entrevistados. A importância de sua utilização se dá por que:

> A reta numérica, como objetivação do conceito de número, expressa a concatenação dos naturais, inteiros, racionais e irracionais. Na interação de todos os seus aspectos e partes, ela permite o estudo da multiplicidade das propriedades da estrutura interna do conceito de número. [...] a reta numérica é a imagem ideal do conceito de número (ROSA, 2012, p.165).

A autora enfatiza a importância de se criar situações de ensino que estejam centradas no processo de representação do número na reta numérica. Apresentá-la pronta aos alunos, para que observem a sequência de números ou façam a localização de pontos, não garantirá que haja o desenvolvimento de um processo em que número e reta produzam significado e sentido um ao outro. Assim se impossibilita o trabalho com a ideia de número real, que deve ser o foco da atividade de ensino da Matemática (ROSA, 2012).

O fundamento que permeia todos os tipos de número real (naturais, racionais, inteiros, irracionais) é o conceito de grandeza (DAVYDOV, 1982 apud ROSA, 2012), quando uma é tomada para se calcular a outra:

> O processo de aplicar a unidade de medida sobre a grandeza a ser medida é de caráter geométrico. A quantidade de vezes que a unidade cabe na grandeza traduz o teor aritmético, que surge a partir da relação algébrica entre grandezas. A propriedade numérica da grandeza varia em dependência da variação da unidade de medida. O conceito de unidade é referência para todos os números singulares e suas operações no campo algébrico, aritmético e geométrico (ROSA, 2012, p.229).

Portanto, a reta numérica possibilita a articulação entre as significações aritméticas, geométricas e algébricas, indispensáveis para o desenvolvimento do pensamento teórico (CRICIÚMA, 2008), através da relação entre grandezas.

A comparação de duas grandezas entre si possibilita reconhecer quantas vezes uma cabe na outra. Desta comparação, aparecem as marcas de unidades inteiras na reta numérica. A ilustração 6 representa a comparação de duas grandezas de volume em uma tarefa inicial do livro didático estudado por Rosa (2012):

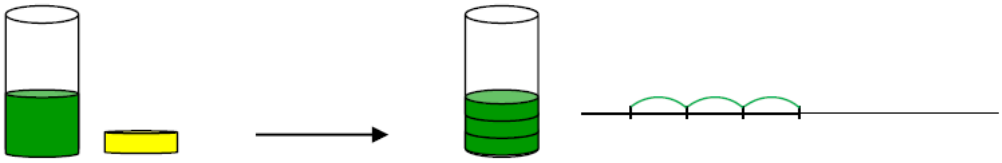


Ilustração 6
Fonte: Rosa (2012, p.163)

Cada arco no esquema representa uma vez que a unidade padrão (amarela) coube no líquido verde. Desta forma, para sabermos quantas vezes ela coube, basta que se conte a quantidade de arcos.

Apresenta-se uma nova tarefa, na qual o esquema possui representação numérica. Através de discussões entre alunos e professor, conclui-se que no segundo esquema há "a identificação da propriedade numérica da grandeza sem contar as unidades. O professor informa que o referido esquema chama-se reta numérica." (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2008 apud ROSA 2012, p.163):

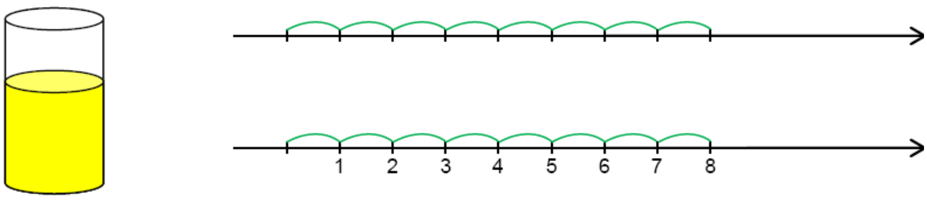


Ilustração 7
Fonte: Rosa (2012, p.164)

Ao final do processo de análise, a autora espera que os estudantes façam uma síntese que contenha a compreensão de que:

> a medição das grandezas é representada pelo número de unidades que tem como referência na reta a partir de seu ponto inicial; o numeral que está no final da última unidade na reta indica o valor da medida; a unidade deve ser sempre a mesma, apesar de ser fruto de uma escolha livre; sua marcação ocorre estritamente numa direção de modo que, entre dois numerais imediatos, há apenas uma unidade; marca-se o sentido da reta numérica com uma seta; o seu início está ao lado contrário da direção da seta; a contagem se realiza na correspondência entre unidades de segmentos e a sequência numérica. (ROSA, 2012, p.164)

Na continuidade das tarefas, aparecem grandezas desconhecidas, que ao serem comparadas geram o seguinte esquema:

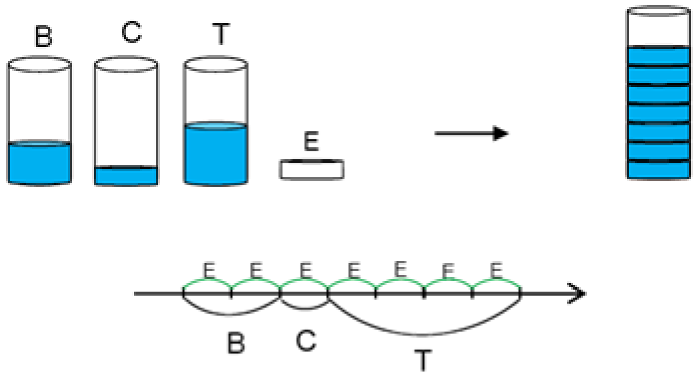


Ilustração 8
Fonte: Rosa (2012, p.166)

Nesta tarefa, observa-se que as grandezas foram analisadas abstratamente, sem a representação numérica associada a elas. As tarefas seguintes continuam com a comparação de grandezas e a sua representação em esquemas. Levam a criança a uma tarefa com a seguinte ilustração:

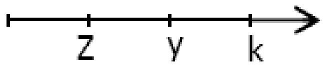


Ilustração 9
Fonte: Rosa (2012, p.176)

Os números abstratos marcados na reta numérica são comparados, a fim de que se identifiquem o antecessor e o sucessor. Além disso, estão relacionados com a ideia de variável, pois podem assumir qualquer valor. Muda-se o valor de cada número várias vezes, para que este aspecto variável seja compreendido. Considerando o valor 1 (um) para y, assumiremos como o valor de k, y adicionado de um, ou seja, 2. E ainda, z seria y diminuído de 1, que é igual a zero. Porém, se para k se desse o valor 1, z seria um número negativo, resultante da subtração zero menos 1. Neste caso, y seria a origem, k seria um número positivo e z um número negativo. Percebem-se as possibilidades que temos ao trabalhar com números abstratos em atividades semelhantes em sala de aula, uma vez que aparecem todas as significações do número:

> aritméticas (antecessor e sucessor), geométricas (reta numérica) e algébricas (variáveis). Isso ocorre num sistema de nexos mentais, como síntese de múltiplas determinações, base do pensamento teórico, pois não opera com representações, mas com conceitos. Desse modo, a sequência numérica aparece em forma de atividade mental, por meio da qual se reproduz seu sistema integral de inter-relações (ROSA, 2012, p.177).

Porém, as falas que seguem indicam a elaboração da reta numérica como um processo mecânico ou um instrumento pedagógico manipulativo. Não consideram as significações teóricas do conceito de número, quais sejam, a relação entre grandezas e o teor aritmético, algébrico e geométrico. “para eles entenderem bem a reta numérica, a gente confecciona” (PROFESSOR 1). “faz com material [...] tu pega e vai colocando as unidades, numa régua grande” (PROFESSOR 4). “eu fiz aquela régua operatória que explica como é que faz no site da revista nova escola, que abre” (PROFESSOR 3).

Como visto nas tarefas apresentadas por Rosa (2012) com base em Davidov (1982), a ideia de reta numérica deve acontecer concomitantemente com o conceito de número real, o que não aparece na fala dos professores. A forma como utilizam a reta numérica no processo de ensino é facilmente observada nos livros didáticos do 7º ano do ensino fundamental utilizados na RMEC, no presente ano e em anos anteriores. Por meio de leitura superficial, percebe-se que a reta numérica, comumente chamada de reta numerada nos livros didáticos, é utilizada como objeto de visualização dos números relativos e das operações que os envolvem, não apresentando o conceito de número atribuído a ela.

Giovanni e Castrucci (2009), no livro didático de matemática do 7º ano do Ensino Fundamental, citam a fita métrica e a trena como exemplos da utilização da reta numérica. Observam ainda, que ela não precisa ser horizontal, comparando-a com o termômetro, que é vertical. Fica claro que esta forma de ensino prioriza o conhecimento empírico.

Para a compreensão de que a reta numérica é o lugar geométrico de todos os números é necessária a compreensão do zero origem. Porém, como o ensino tradicional prioriza desde as séries iniciais o zero absoluto, o movimento na reta numérica e a ideia do zero origem deixam de ser compreendidos.

Em termos operacionais, para Rosa (2012, p.199), cada vez que se adiciona uma unidade na reta numérica, conta-se para frente e, da mesma forma, quando se subtrai uma unidade se conta para trás, o que constitui “o sistema de nexos e relações gerais entre os números na sequência numérica, como unidade infinitamente diversa”. Essa ideia aparece somente na fala do Professor 3: “você soma um, sempre você vai somar, vai aumentando porque você soma um. Então para a esquerda está sempre diminuindo um, então zero, se tu diminuir um vai ficar um negativo, diminuiu mais um vai ficar dois negativos”.

O que ilustramos genericamente a seguir:

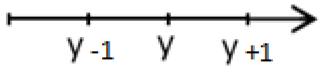


Ilustração 10
Fonte: elaboração nossa, com base em Rosa (2012).

Contraditoriamente, o mesmo professor ensina também a operação de adição de números relativos, por meio de tampinhas, relacionando-as à reta numérica:

> Quando vamos fazer a adição de números inteiros, usamos as tampinhas de refrigerante. Colocamos elas em cima da mesa, marcamos um ponto que é o zero, pra direita eles colocam as tampinhas viradas pra baixo. É combinado que quando a tampinha está virada pra baixo é positivo, quando ela está com aquela abertura pra cima é negativo. Então na hora de fazer a adição e a subtração fica legal porque daí tu pega quatro negativo mais três positivo, aí eles tem que colocar quatro tampinhas viradas pra cima e três pra baixo, aí eles alinham elas, um negativo com um positivo anula, é zero, eles vão visualizando (PROFESSOR 3).

Novamente o número zero aparece como resultado de uma operação de subtração ou adição, indicando nenhum objeto (zero absoluto). O zero absoluto é considerado, (GLAESER, 1985, p.54), como "nada, abaixo do qual nada é concebível. Entende-se que não se pode ser mais pobre que o pobre absoluto, completamente desprovido, que nada possui. A luz deste conceito, os números absolutos são evidentemente um absurdo." Já o zero origem, "propicia a criação dos números negativos"[19].

Ao trabalharmos as relações numéricas entre grandezas na reta numérica, o número zero aparecerá na subtração sucessiva da direita para a esquerda. Segundo Rosa (2012, p.204), o número zero "representa o ponto de origem da reta numérica e a ausência de unidades." Ao resolver subtrações sucessivas do tipo, 3-1, 3-2, a criança chegará em 3-3, observando que o resultado dessa subtração está na origem da reta numérica. A autora enfatiza que neste momento a reta passa a ter origem: o número zero, que conceitualmente se difere da definição de que zero não é nada.

Desta forma, já é iniciada a ideia de números negativos, ao continuarmos com as subtrações, 3-4, 3-5 e assim sucessivamente, ocupando a reta numérica com novos números no sentido oposto ao sentido positivo. Com a elaboração do

---

[19] Idem, p.54.

conceito de número por meio da comparação entre grandezas, utiliza-se o universal (conceito de número real) para se chegar ao particular (conceito de número negativo).

Percebe-se uma preocupação por parte dos professores em utilizar a reta numérica no processo de ensino, embora o que aparece nos livros ainda não é o esperado. Para o Professor 2, o livro didático está organizado com muitos macetes e regras: “ao invés de trazer numa abordagem histórico-cultural, que trabalha reta numérica”, apresenta uma sequência de ensino dos conjuntos numéricos (natural, inteiro, racional e real) que não deveria acontecer, pois “um está dentro do outro” (PROFESSOR 2).

O Professor 1 acredita que o ideal seria trabalhar todos os conjuntos numéricos concomitantemente, no entanto, acha que: “é muito complicado, é difícil, o aluno pra assimilar tudo junto não consegue. Por enquanto, assim, pra trabalhar com o aluno é o ideal (a ordem), devagarinho, sem tropeços” (PROFESSOR 1).

O Professor 3 também acredita que os números naturais devem iniciar os estudos, pois compreendendo o conjunto dos números naturais, os alunos serão capazes de compreender o conjunto dos números inteiros. O Professor 4 completa:

> através da observação e análise, então o aluno percebe as relações desses conjuntos e sempre assim verificando que veio a ampliação sucessiva dos naturais. Eu acho que tem que ser primeiro, que daí a partir dos naturais, eles vão tirando sucessivamente os outros conjuntos. Eu acho que está na ordem.

Neste ensino, os números, as unidades, por vezes são concebidos enquanto objetos soltos. Assim, iniciam o estudo pelos números naturais e gradativamente, conforme os anos de escolarização, ampliam os conjuntos numéricos, até chegarem aos números reais (geralmente no último ano do ensino fundamental). Para Davídov (1987 apud ROSA, 2012, p.68) “os princípios que fundamentam o conteúdo e os métodos de tais livros mais se aproximam ao [...] tradicional”.

Os registros dos professores deixam claro, na sua maioria, que há uma preocupação com a forma como os conteúdos são organizados no currículo, apesar da aceitação da ordem que aparecem nos livros didáticos de Matemática. A significação do número real (ROSA, 2012) está na comparação entre as grandezas, como dito anteriormente, pois “o número real é o conceito que permeará todas as atividades de ensino. Na hierarquia conceitual os números naturais, racionais, irracionais e relativos são produções históricas que se constituem, em síntese, em números reais" (CRICIÚMA, 2008).

As dificuldades relatadas pelos professores, conforme segue, são caracterizadoras do ensino tradicional. O Professor 1, por exemplo, tem dificuldade em fazer seus alunos "entenderem que na reta numérica, **quanto maior ele for, menor ele é**, menos valor ele tem" (grifo nosso).

O Professor 2 acrescenta que "A maior dificuldade é quando tu põe **um número negativo maior que o positivo** e eles não conseguem perceber o quanto eles tem e o quanto eles devem e o número é muito alto e eles não tem como demonstrar na reta" (grifo nosso).

E o Professor 4 afirma que "**quanto mais longe do zero, menor valor ele tem**" (grifo nosso).

Em relação à ordenação de números na reta numérica, encontramos em Caraça (1984) a definição, baseada na ilustração abaixo:

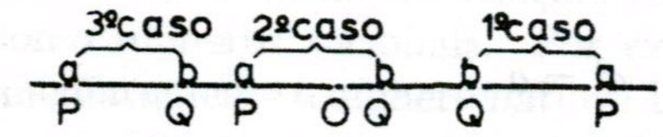


Ilustração 11
Fonte: Caraça (1984, p. 94)

"Dados dois números reais relativos *a* e *b*, aos quais correspondem bijectivamente os pontos *P* e *Q*, diz-se que *a* > *b*, *a* = *b* ou *a* < *b* conforme *P* está à direita de *Q*, *P* coincide com *Q*, ou *P* está à esquerda de *Q*." Sendo assim, qualquer número que esteja à direita de outro número será maior que este e ao contrário, qualquer número que esteja à esquerda dele será menor. Muitas vezes, percebem-se equívocos conceituais na linguagem dos professores, geradores de dificuldades e obstáculos na compreensão dos conceitos. É possível que com a definição, na reta numérica ou não, as dificuldades apontadas pelos professores sejam minimizadas.

Da definição de Caraça (1984, p.94) para a ordenação dos números também temos que "*qualquer* número positivo é maior que *qualquer* número negativo" (grifo do autor) e que "de dois números negativos, é maior o que tiver menor valor absoluto”[20]. Retomando as falas dos professores 1 e 2 sobre as suas dificuldades e de seus alunos: “entenderem que na reta numérica, **quanto maior ele for, menor ele é**, menos valor ele tem” (grifo nosso) (PROFESSOR 1) e “a maior dificuldade é quando tu põe **um número negativo maior que o positivo** e eles não conseguem perceber o quanto eles tem e o quanto eles devem e o número é muito alto e eles não tem como demonstrar na reta” (grifo nosso) (PROFESSOR 2).

As falas se revelam equivocadas, pois pela definição de Caraça (1984), um número negativo somente será menor que outro número negativo, quando seu valor absoluto for maior, o que não fica explícito nas falas acima citadas.

O Professor 4, ao dizer que “quanto mais longe do zero, menor valor ele tem” usa uma linguagem insuficiente para a compreensão teórica. Essa afirmação é válida, se o número estiver à esquerda do zero. Se o número estiver à direita essa afirmação não é verdadeira. Por exemplo: +44,9 está mais longe do zero e é maior do que +13,5, que se localiza mais próximo do zero. Segundo Battist e Nehring (2009, p.62):

> A linguagem matemática pode representar um nível superior de generalidade e sistematização, como também ser totalmente vazia. (...) Como as significações estão associadas aos sentidos produzidos pelos alunos, é essencial no processo de ensino que o professor perceba aquelas por eles apropriadas.

O Professor 2 poderia identificar na reta numérica, escalas diferentes conforme a necessidade de representação. Por exemplo, para representar o número -247,8, faria

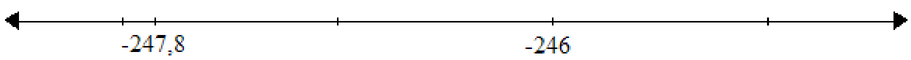


Ilustração 12
Fonte: elaboração nossa

Após realizar várias situações utilizando a reta numérica, os alunos deveriam resolver mentalmente as operações, pois “a reta numérica, convertida em meio para o estudo das propriedades do conceito de número, possibilita sua passagem ao plano mental” (ROSA, 2012, p.200). Assim, os alunos resolveriam

[20] Idem, p.55.

situações envolvendo números muito pequenos ou muito grandes na reta numérica, pois teriam condições de operar mentalmente com eles.

Desse modo, algumas dificuldades apontadas poderiam ser minimizadas, ao adotarem a linguagem teórica e não a empírica, como é evidente nas falas dos professores entrevistados.

4.3 OPERAÇÕES COM NÚMEROS RELATIVOS

A categoria de análise "Operações com Números Relativos" tratará das operações fundamentais da Matemática e será apresentada em duas seções: "Adição e Subtração" e "Multiplicação e Divisão".

Para este estudo, elegemos apenas as quatro operações básicas citadas anteriormente, devido ao fato de que durante a entrevista, os professores não fizeram menção às demais operações matemáticas, quais sejam: potenciação, radiciação e logaritmação. Caraça (1984, p.16) afirma que estas operações são ligadas imediatamente às operações fundamentais, portanto, ao estudar as propriedades e conceitos da adição, subtração, multiplicação e divisão, estes se estenderiam às operações de potenciação, radiciação e logaritmação. No entanto, não desconsideramos a importância do estudo das particularidades destas operações, que poderia ser o objeto de estudo de outra investigação.

De acordo com Caraça (1984), a operação inversa da adição é a subtração e a operação inversa da multiplicação é a divisão. Desse modo, nas seções a seguir, optamos em analisar a operação e sua inversa, uma vez que sob este olhar se dará o entendimento teórico do conceito em estudo.

4.3.1 Adição e Subtração com Números Relativos

Inferimos que o ensino das operações de adição e subtração pelos professores entrevistados, fundamenta-se em relações empíricas, principalmente relacionadas a situações do cotidiano e a materiais manipulativos.

O pressuposto é que, algumas dificuldades por parte dos alunos na compreensão das operações de adição e subtração no campo dos números relativos se dão pela confusão semântica entre os símbolos das operações e os sinais de indicação do número positivo e negativo[21].

Glaeser (1991) se refere aos símbolos da operação e do número, como operatórios e predicativos. Este último, segundo Ferreira (1993), indica a qualidade atribuída ao sujeito, ou seja, ao número. Esta qualidade pode ser de número positivo (quando à direita do zero) ou de número negativo (quando à esquerda do zero).

Da mesma forma, Caraça (1984) apresenta que um número real a é considerado independentemente das suas qualidades no campo relativo, sendo chamado de número absoluto. Porém, ao considerarmos o mesmo número real a no campo relativo, teremos que diferenciar em qual dos sentidos ele se localiza, apresenta o sinal positivo (+) para os números à direita do zero e o sinal negativo (-) para os números à esquerda. Assim, as qualidades do número para o autor, indicadas pelos dois sinais, também se diferenciam em significado dos símbolos operatórios.

A diferença entre os símbolos operatórios e os sinais dos números também é evidenciada por Kline (1987 apud MEDEIROS; MEDEIROS, 1992, p.5), quando afirma que os símbolos são os mesmos nos dois casos, “embora símbolos separados devessem ter sido usados porque um número negativo é um conceito independente, enquanto a subtração é uma operação”.

Para D’Augustine (1976, p. 264-265), os números à esquerda do zero são indicados, primeiramente com uma seta apontando para a esquerda acima do número, e os positivos com a seta à dir $\overrightarrow{3}$ **três positivo** $\overleftarrow{4,5}$ **e quatro vírgula cinco negativo.**

Em seguida, substitui as setas por sinais: - para os negativos e + para os positivos. Na sequência, introduz a ideia de número oposto, por meio de adições do tipo: $^{+}7 + {}^{-}7 = 0$, em que $^{+}7$ é o oposto de $^{-}7$. É notável no trabalho do autor a diferenciação entre os sinais que indicam o sentido do deslocamento (sobrescritos) e os símbolos que indicam a operação.

A partir da ideia de número oposto, D’Augustine (1976), introduz a operação de subtração, como sendo a “operação em que um número é seguido pelo oposto de outro número. Assim, $^{+}7$ seguido pelo oposto de $^{-}2$ significa $^{+}7$ seguido de $^{+}2$” (D’AUGUSTINE, 1976, p.265), sugere a substituição da expressão: *seguido pelo oposto de* pelo símbolo (–) e a expressão: *seguido de* pelo símbolo (+), chega a:

[21] Utilizaremos a nomenclatura *símbolo* (+ e -) sempre que nos referirmos às operações de adição e subtração. E *sinais* (+ e -) quando nos referirmos ao número positivo e negativo.

$^{+}\mathbf{7} - {}^{-}\mathbf{2} = {}^{+}\mathbf{7} + {}^{+}\mathbf{2} = {}^{+}\mathbf{9}$.

Da mesma forma, Caraça (1984) define que:

> Em particular, tem-se a + (-b) = a + (0 - b) = a + 0 –b = a – b, a – (-b) = a – (0 – b) = a + b – 0 = a + b, isto é, *somar um número negativo equivale a subtrair o número positivo com o mesmo módulo; subtrair um número negativo equivale a somar o número positivo com o mesmo módulo* (CARAÇA, 1984, p. 97 – grifos do autor).

Sendo assim, percebemos que duas operações distintas, adição e subtração, tendem a ser expressas da mesma forma:

(-4) + (-3,5) = adição de dois números negativos.

(-4) – (+3,5) = subtração de um número negativo e um positivo.

Embora as operações sejam diferentes, subtrair um número é o mesmo que adicionar o número oposto:

$$(-4) - (+3,5) = (-4) + (-3,5)$$

Assim, as duas operações possuem os mesmos resultados, embora surjam de situações diferentes:

$$(-4) + (-3,5) = -7,5$$
$$(-4) - (+3,5) = (-4) + (-3,5) = -7,5$$

Caraça (1984, p.97), afirma que “No campo relativo, as duas operações aparecem-nos assim unificadas numa só, que se chama *adição algébrica*” (grifos do autor). Então as operações podem ser assim escritas:

$$(-4) + (-3,5) = -4 -3,5 = -7,5$$
$$(-4) - (+3,5) = -4 -3,5 = -7,5$$

Portanto, na adição algébrica, desconsideramos a operação que se realiza (adição ou subtração), pois o importante será a direção em que o deslocamento acontecerá na reta numérica. Nos exemplos apresentados, há dois deslocamentos à esquerda que são adicionados, conforme indica a ilustração 13:

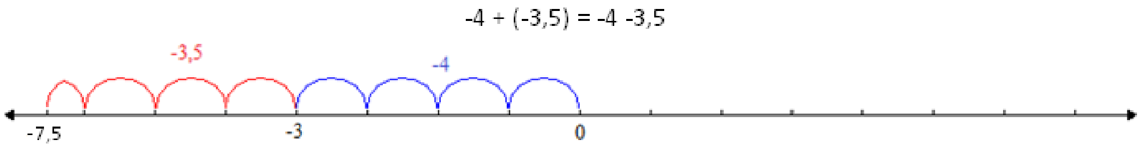


Ilustração 13
Fonte: elaboração nossa, com base em Rosa (2012)

No exemplo a seguir, o deslocamento é à direita:

(-4) + (+7) = -4 +7 = +3
(-4) - (-7) = -4 +7 = +3

A adição algébrica indica aqui, que um deslocamento será subtraído de outro para encontrarmos o resultado, pois ocorrem em sentidos opostos:

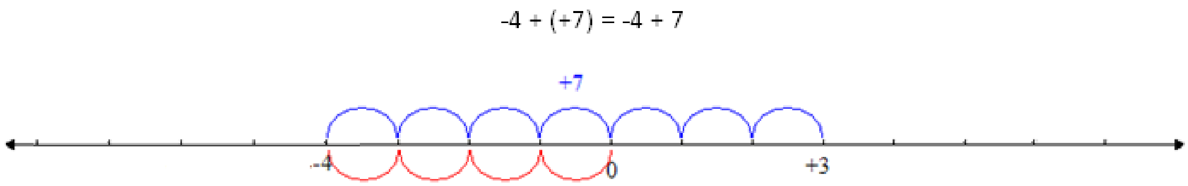


Ilustração 14
Fonte: elaboração nossa, com base em Rosa (2012)

Para a compreensão da operação de adição é indispensável a qualquer estudante, porque será a base para a aprendizagem de futuros conceitos matemáticos, uma vez que:

> É a operação mais simples e da qual todas as outras dependem. A ideia *adicionar* ou *somar* está já incluída na própria noção de número natural – o que é a operação elementar de passagem de um número ao seguinte, senão a operação de somar uma unidade a um número? (CARAÇA, 1984, p.16).

Para o autor, quando somamos um número *x* a um número *y* qualquer, efetuaremos *x* passagens sucessivas pela operação elementar, a partir de *x*. Um aspecto importante ao se trabalhar com esta operação é conhecer seus termos: *x* é o adicionando, *y* o adicionador e aos dois juntos se dá o nome de parcelas. A representação da operação de adição entre *x* e *y* é dada por *x* + *y*, em que *x* tem um papel passivo e *y* um papel ativo.

Relacionada à operação de adição, existe outra em que conhecemos a soma (ou total) e uma das parcelas que a compõe, podendo determinar a outra parcela. Esta é a operação de subtração, em que do todo, subtrai-se uma parcela para se encontrar a outra.

Representada pelo símbolo $a - b$, é "a operação pela qual se determina um número c que, somado com b, dá a: $a - b = c \Leftarrow c + b = a$" (CARAÇA, 1984, p.20). Nesta operação, a é o diminuendo ou aditivo, b é o diminuidor ou o subtrativo e c é o resto ou a diferença.

Em situações de ensino, é comum não se dar a devida importância aos termos das operações matemáticas, equivocadamente se valoriza o saber fazer em detrimento da apropriação do conhecimento científico e da linguagem matemática. Assim, quando é solicitado aos alunos calcularem a diferença entre dois números, por exemplo, primeiramente, observam as características dos números e não identificam o cálculo da operação matemática, qual seja, a subtração.

Apesar das operações de adição e de subtração possuírem suas especificidades, elas se completam, pois a subtração é a operação inversa da adição (CARAÇA, 1984). No campo dos números relativos, qualquer operação de subtração é possível, devido à possibilidade de se considerar os números negativos.

Para o ensino destas operações exige-se entendimento da significação do conceito de número, não apenas conjuntos numéricos específicos, pois assim se ampliam as possibilidades de ensino. Um aspecto muito importante é trabalhá-las concomitantemente. Rosa (2012, p.198) alerta para o fato de que:

> Os livros didáticos brasileiros introduzem a adição, depois a subtração e, finalmente, a inter-relação entre ambas. Em Davydov o movimento é o oposto. Primeiro estuda-se a conexão geneticamente inicial (condições de construção iniciais) do movimento inverso entre ambas, depois se analisa as especificidades de cada uma e, finalmente, retoma-se ao sistema integral para introdução de resolução de problemas envolvendo as duas operações.

O desenvolvimento das particularidades de cada operação na reta numérica permite que o ensino das operações seja significativo. Diferentemente do que ocorre quando o ensino se limita a ações entre números concretos, tomados empiricamente, como aparece na fala dos professores:

> Na adição e na subtração, eu uso muito os termos devo e tenho, onde o devo é a dívida, que seria o número negativo, e o tenho seria o dinheiro, o número positivo. Esses termos que eu uso, ganhar e perder, funcionam bastante, eu percebo que quando eu vou explicar principalmente o início da adição e da subtração é a melhor maneira pra eles entenderem. E claro, a reta numérica também eu uso bastante (PROFESSOR 1).

> Exploro situações em que parte tudo da adição. Tipo, perda, ganho, saldo bancário, verificação de temperaturas, altitude, profundidade, saldos de gols, então a partir daí pra eles começarem a perceber a diferença assim, entre o negativo e o positivo (PROFESSOR 2).

Ao relacionar as operações com números relativos às situações cotidianas, os professores limitam o conhecimento ao nível empírico, fato que obstaculiza o desenvolvimento do pensamento teórico. Tal conduta, decorrente do ensino tradicional, prioriza apenas os aspectos externos e visualmente perceptíveis dos objetos (ROSA, 2012).

Os termos “devo” e “tenho” estão relacionados diretamente a situações empíricas. Dívidas e crédito, neste caso, são entendidos como números e as operações de adição e de subtração são realizadas entre eles. Mas o que é um número negativo? Caraça (1984, p.92) apresenta primeiramente a definição de número relativo: “*Sejam a e b dois números reais quaisquer: à diferença a – b chamaremos número relativo, que diremos positivo, nulo ou negativo, conforme for a > b, a = b, a <* b.” (grifos do autor). Portanto, em Caraça (1984, p.92), um número negativo é aquele proveniente da diferença a – b, quando o terceiro caso ocorrer, ou seja, a < b.

Outra vez, nas operações no campo dos relativos, os números são considerados pelos professores como “objetos soltos”, relacionados somente a quantidades discretas, segundo eles, facilitam o entendimento do aluno. O número, nesta perspectiva é algo concreto e palpável:

> na metodologia tradicional de iniciação da criança no conhecimento dos números se fazem coincidir por certo as unidades do número com objetos físicos soltos. A criança não distingue claramente o objeto mesmo do cálculo e os meios consolidativos do resultado. Isto é um defeito essencial do conceito de número. Manifesta-se em que a criança não pode efetuar o cálculo ou a medição com medidas arbitrárias estabelecidas de antemão. Além disso, identificará os elementos do objeto com as unidades do número (DAVYDOV, 1982, apud ROSA, 2012, p. 57).

Qual a necessidade de corresponder um a um elementos de um conjunto com numerais? Talízina (1987 apud ROSA, 2012, p.194), menciona que:

> muitos alunos realizam as operações aritméticas corretamente, sem o entendimento do sentido matemático. Tal compreensão só acontece se precedida da aquisição de uma concepção de número como uma relação e, também, da propriedade numérica como resultado da relação de comparação entre a grandeza e a unidade de medida.

Costa (1866, p.9) concorda ao afirmar que “os números são expressões de medida das grandezas”, diferenciando dois tipos de números. Os concretos, quando se nomeia o tipo de unidade. E os números abstratos, quando não se nomeia. Cita como exemplo: “quando enunciamos o numero tres, sem o applicarmos a nenhuma colleção de objectos, tres é neste caso numero abstracto; mas, se dizemos: tres colunnas ou tres horas, tres é então numero concreto”[22].

Vale o alerta de que desenvolver o cálculo numérico em situações reais apenas fortalece o conhecimento empírico. Muitos ainda utilizam os dedos de forma primitiva, para realizar a contagem em uma operação de adição. Rosa (2012, p.194 apud Vigotski 2000), diz que:

> a contagem nos dedos traduz uma conduta produzida historicamente, atrelada a ideia de número como propriedade de coleções de objetos. Isso é observável, segundo Aleksandrov (1976), nos nomes de certos números, como por exemplo, mão para cinco, homem completo para vinte. O número cinco não era entendido no sentido abstrato, mas simplesmente que havia tantos quanto os dedos de uma mão.

A autora afirma que quando isto ocorre (por meio dos dedos levantados ou de coleções de objetos) não é realizada a operação de adição, mas sim a contagem. Porém, somar é mais do que contagem de agrupamentos distintos: “somar a um número *a*, dado, outro número *b*, é efetuar a partir de *a*, *b* passagens sucessivas pela operação elementar” (CARAÇA, 1984, p.17).

Desta forma, ao relacionarmos o número apenas à quantidade de objetos soltos, nos distanciamos da ideia de número abstrato, não podendo operar com as características gerais do número, mas com as suas particularidades, pois para Costa (1866, p.11), “Os numeros concretos, fallando propriamente, não são numeros, são *quantidades*” (grifos do autor). Como a quantidade de graus, -7ºC, a quantidade de dívida, -R$65,00, a quantidade de saldo de gols, -5, entre outras.

---

[22] Idem, p.10.

Nas situações de ensino apresentadas nos livros didáticos utilizados pelos professores, é comum estas quantidades aparecerem como números. A ideia de número somente como quantidade palpável aparece na fala do Professor 3, na forma como trabalha a operação de adição de números relativos com seus alunos:

> Na adição de números inteiros, usamos as tampinhas de refrigerante. Nós colocamos em cima da mesa, marcamos um ponto que é o zero, pra direita eles colocam as tampinhas viradas pra baixo (positivo), quando ela está com a abertura pra cima é negativo. Na hora de fazer a operação fica legal, porque tu pega quatro negativo mais três positivo, eles tem que colocar quatro tampinhas viradas pra cima e três pra baixo, aí eles alinham elas, um negativo com um positivo anula, é zero, eles vão visualizando ali, sabe, é bem interessante.

Da mesma forma, para o ensino das operações de adição e subtração, o Professor 4 utiliza "cartões numerados de duas cores. Coloco o azul pra *adição*, eu uso *mais*, e vamos tirando o que é vermelho, que é o de menos, o negativo. Aí se sobra mais azuis então o resultado foi *positivo*, se sobrar mais do vermelho, o resultado foi negativo” (grifos nossos).

Porém, na fala do Professor 4, a confusão semântica existe ao afirmar que utiliza o cartão azul para a adição. Sua intenção é representar com o cartão azul os números positivos e com o cartão vermelho os negativos. No entanto, sua linguagem não deixa claro, pois na mesma fala se refere aos números positivos de três maneiras distintas: “adição”, “mais” e “positivo”. Considerando esta fala em situação de ensino, justifica-se as dificuldades que os alunos encontram ao resolver estas operações. Vale salientar que além da confusão semântica, o ensino do referido professor é galgado em conhecimento empírico ao relacionar os números positivos e negativos à quantidade de cartões.

Além do material manipulativo não proporcionar a elaboração conceitual destas operações, a linguagem utilizada para expressar a forma como ensinam a adição e a subtração de números relativos implica em confusões semânticas. Como vimos, distintos autores (GLAESER, 1981, D’AUGUSTINE, 1976, CARAÇA, 1984) discorrem sobre a diferenciação dos símbolos operatórios, mais (+) e menos (-), dos sinais indicativos do sentido de um número, positivo (+) ou negativo (-), com vistas à elaboração do conceito de adição e de subtração no campo dos números relativos.

Tal diferenciação aparece na fala do Professor 3, quando afirma: “quatro negativo mais três positivo”, embora relacione estes números a diferentes quantidades de tampinhas, desconsiderando que “o número é um caso singular das relações entre grandeza” (ROSA, 2012, p.136).

Nota-se que nos dois casos, as operações com quantidades são estruturadas em situações cotidianas. Assim sendo, geralmente envolvem apenas o conjunto dos números inteiros positivos (naturais), em seguida dos números inteiros. Não consideram que a ideia de número deve partir da noção universal de número real, que permeia todos os demais conjuntos numéricos que dele fazem parte.

Os professores entrevistados afirmam utilizar cartões e tampinhas no processo de ensino, porém desta forma não há a possibilidade de desenvolver o conceito de número decimal. Torna-se impossível perceber que entre uma tampinha (que representa um número inteiro) e outra há infinitos números, sendo que aparecem relacionados apenas com quantidades discretas. A representação geométrica por meio da reta numérica permite o entendimento que entre um número inteiro e outro existem infinitos números.

O ensino das operações de adição e subtração a partir de problemas do dia-a-dia[23] envolvendo compras, dívidas e ganhos, limitará o aluno a resolver apenas situações reais. Impossibilita a compreensão da relação entre as duas operações, que para Davydov (1982 apud ROSA, 2012, p. 196), se dá:

> A partir da diferença entre grandezas [...] O conhecimento teórico de tais operações surge no processo de análise da diferença entre grandezas, base geneticamente inicial de ambas as operações. [...] A adição e a subtração são introduzidas, respectivamente, como contagem para frente ou para trás; posteriormente, registradas como sentenças e, gradualmente, elevadas ao plano mental (ROSA, 2012, p.196).

O Professor 4 realiza as operações de adição e de subtração na reta numérica, por meio de deslocamentos para frente ou pra trás:

[23] Davidov também apresenta em seus livros situações do dia-a-dia. Porém, com a diferença de não apresentar resolução com dados empíricos, mas com base em conhecimento científico. Davydov (1982 apud ROSA, 2012, p.220) afirma que “a ilustração de problemas-textos com desenhos ou situações do dia-a-dia levam [...] à omissão dos aspectos matemáticos do problema, bem como suas interconexões”.

> Eu trabalho a partir do exemplo, mas depois eu coloco tudo, eu acho que a reta numérica é muito válida pra isso. Porque tipo assim na adição. Vamos colocar um torneio de futebol entre Brasil, Argentina e México. O saldo de gols, vamos supor, do Brasil, cinco gols na primeira etapa, três gols na segunda. O que eu faço? Eu coloco lá na reta numérica, vou partir da origem, que é o zero né e vou a partir da origem, nós fazemos um deslocamento de cinco unidades na primeira etapa. A segunda etapa, a partir do ponto que eu associei ao cinco, eu vou contar mais três unidades a ele, então vai ficar com oito. Se for positivo e negativo, essa soma de positivo e negativo, a mesma coisa, vou à direita, depois na primeira etapa e se for negativo na segunda volto aí verifico quanto o saldo que ficou.

Apesar do uso da reta numérica, a relação dos números é para situações reais de aplicação. A operação é realizada com quantidade de gols e não com números genéricos. Essas situações reafirmam o conhecimento empírico, impossibilitando que os alunos elevem estas operações ao nível mental como proposto por Davydov (1982).

> Menos dez com menos sete são duas dívidas, ele está devendo dez reais e está devendo sete reais então ele está devendo dezessete. Até eles entendem é melhor desta forma. E positivo também, é o dinheiro. Então ele vai somar o que já tem [...]Mais sete é o dinheiro, a quantidade de dinheiro que ele tem pra pagar e menos oito é a dívida, é o que ele tem que pagar. Então se ele tem sete reais ele vai pagar sete e vai ainda ficar devendo um, que ele deve oito reais (PROFESSOR 1).

Glaeser (1981, p.38), afirma que “uma aprendizagem satisfatória das propriedades aditivas, apoiada num "bom modelo", pode criar bloqueios posteriores, quando for o caso de compreender as propriedades multiplicativas”, como ocorre ao se trabalhar com dívidas e posses.

4.3.2 Multiplicação e Divisão com Números Relativos

Para Davydov (1982 apud ROSA, 2012 p.24) “na educação escolar a prioridade deve ser para o desenvolvimento do pensamento teórico em detrimento do pensamento empírico”.

Historicamente o número natural surgiu lentamente pela prática diária da contagem, os racionais pela necessidade da medida. Na sequência os irracionais, para resolver o problema teórico da medida e os números relativos para resolver o problema das grandezas que podem ser tomadas em dois sentidos opostos (ROSA, 2012, p. 27).

A operação de multiplicação é considerada por Caraça (1984, p.16), como uma das operações fundamentais da matemática e é concebida como uma operação direta, na classificação de diretas e inversas estabelecida pelo autor. A multiplicação é definida como a soma de parcelas iguais: $a.b = a + a + a + ... + a$, em que *a* se repete *b* vezes para encontrarmos o resultado. A parcela que se repete *a*, é chamada de multiplicando, o número *b*, maior que um, que é o número de vezes que a aparece como parcela, é chamado de multiplicador, aos dois juntos, dá-se o nome de fatores e o resultado da multiplicação é chamado de produto. Neste caso, o multiplicando *a*, possui um papel passivo, já o multiplicador *b*, um papel ativo.

Caraça (1984, p.18) também apresenta algumas propriedades desta operação que serão úteis na compreensão da multiplicação no campo dos números relativos. São elas: propriedade comutativa: a.b = b.a; propriedade associativa: a.(b.c) = (a.b).c; e propriedade distributiva: a. (b.c) = a.b + a.c

De acordo com os professores entrevistados, a maior dificuldade dos alunos encontra-se na compreensão da operação de multiplicação de números relativos, mais especificamente, na multiplicação de dois números negativos. Tal dificuldade também se manifesta no processo de ensino, quando os professores buscam diferentes alternativas para justificar o resultado do produto de dois números negativos. Conforme segue:

> eu sei que eu tenho muito que aprender, fico pensando, com dezenove anos de experiência, pego livro didático, estudo bastante. Eu não sei, ainda não sei se tem um jeito melhor pra explicar isso. [...] como é que eu vou explicar que um número negativo vezes um número negativo fica positivo? (PROFESSOR 3).

Fica explícita na fala, a insatisfação do uso da regra de sinais para o ensino da multiplicação de números negativos. Ao longo da história, muitos matemáticos apresentaram questionamentos em seus estudos, relativos à aceitação de tais regras (Diofante, Brahmagupta, Leonardo de Pisa, Cardano, Viète, Stifel, entre outros). No entanto, Glaeser (1981 apud SCHUBRING, 2000, p.52) se surpreende “ao constatar que a regra dos sinais (sobre a qual ele centra seu estudo) tenha sido capaz de suscitar tantas dificuldades para os matemáticos e para os didatas”.

Para minimizar a dificuldade, o Professor 3 propõe uma atividade na qual se analisa a regularidade dos sinais de produtos de multiplicações sucessivas. Trata-se de uma tabela, presente em diferentes livros didáticos brasileiros do 7º ano do ensino fundamental (DANTE, 2005; IMENES, 2009) e se baseia na seguinte sequência[24]:

(-2,5) . +5 =	-12,5
(-2,5) . +4 =	-10
(-2,5) . +3 =	-7,5
(-2,5) . +2 =	-5
(-2,5) . +1 =	-2,5
(-2,5) . 0 =	0
(-2,5) . -1 =	+2,5
(-2,5) . -2 =	+5
(-2,5) . -3 =	+7,5
(-2,5) . -4 =	+10
(-2,5) . -5 =	+12,5

Tabela 1
Fonte: elaboração nossa, com base nos livros didáticos de matemática

A tabela, de acordo com os livros citados, apresenta uma sequência multiplicativa, cujo multiplicando é dois vírgula cinco negativo (-2,5) e o multiplicador é a sequência finita dos números inteiros de cinco positivo a cinco negativo. Os produtos resultam em uma sequência crescente, que justifica o resultado positivo da multiplicação de dois números negativos. Apesar de utilizá-la, o Professor 3 afirma que é “muito pouco pra eles”.

A sequência que se apresenta nos livros didáticos citados é carente de lógica conceitual, fundamentada apenas na sequência dos resultados das multiplicações. No entanto, como visto anteriormente em Caraça (1984), o segundo fator da multiplicação indica quantas vezes o fator -2,5 se repetirá. A multiplicação seguinte da sequência indicará que o multiplicador diminui uma unidade, ou seja, o multiplicador se repetirá uma vez a menos. Portanto, retiraremos uma parcela de -2,5, tantas vezes quantas o multiplicador diminuir:

[24] A ordem dos fatores na tabela é apresentada diferentemente dos livros didáticos citados, para que se garantisse a definição de Caraça para a multiplicação: o primeiro fator – multiplicando, se repete a quantidade de vezes indicada pelo segundo fator – multiplicador.

(-2,5) . n =		-2,5n
⋮	⋮	⋮
(-2,5) . 5 =	(-2,5) + (-2,5) + (-2,5) + (-2,5) + (-2,5) =	-12,5
(-2,5) . 4 =	(-2,5) + (-2,5) + (-2,5) + (-2,5) + (-2,5) – (-2,5) =	-10
(-2,5) . 3 =	(-2,5) + (-2,5) + (-2,5) + (-2,5) – (-2,5) =	-7,5
(-2,5) . 2 =	(-2,5) + (-2,5) + (-2,5) – (-2,5) =	-5
(-2,5) . 1 =	(-2,5) + (-2,5) – (-2,5) =	-2,5
(-2,5) . 0 =	(-2,5) – (-2,5) =	0
(-2,5) . -1 =	0 – (-2,5) =	+2,5
(-2,5) . -2 =	(+2,5) – (-2,5) =	+5
(-2,5) . -3 =	(+2,5) + (+2,5) – (-2,5) =	+7,5
(-2,5) . -4 =	(+2,5) + (+2,5) + (+2,5) – (-2,5) =	+10
(-2,5) . -5 =	(+2,5) + (+2,5) + (+2,5) + (+2,5) – (-2,5) =	+12,5
⋮	⋮	⋮
(-2,5) . -n =		+2,5n

Tabela 2
Fonte: elaboração nossa

As significações da operação de multiplicação implícitas na tabela colaboram especialmente para a compreensão do produto de dois números negativos.

As afirmações dos professores se encontram fundamentadas na concepção tradicional de ensino, no que tange o ensino do conjunto dos números relativos, especificamente a operação de multiplicação. A prioridade que tais professores atribuem às regras operatórias, intensificada pelo o uso do livro didático brasileiro, não proporcionam relação com a lógica conceitual:

> eu utilizo conforme a regrinha de sinais mesmo. A regrinha do mais *com* mais dá mais, sinais iguais mais, sinais diferentes menos. E é assim normalmente que eu uso, eu sei que assim é o método tradicional, mas ainda assim pra eles entenderem eu acho mais fácil (PROFESSOR 1).
>
> A gente usa a regra do mais *com* mais, mais. Menos *com* menos, mais. Ou sinais positivos somamos e sinais diferentes diminuímos. Porque tu tenta explicar o porquê e eles te dizem: professor, mas não tem nenhuma regra assim pra gente conseguir porque a gente mistura tudo na hora, então é assim que acontece tu tenta mas tu acaba usando a regra dos sinais (PROFESSOR 2).

Além da limitação conceitual, verificam-se equívocos na linguagem utilizada. Na operação de multiplicação, anunciam-se as regras operatórias substituindo a palavra multiplicação pela preposição *com*. A confusão semântica entre as duas sentenças é clara: “Mais com mais dá mais” e “Mais multiplicado por mais dá mais”. No primeiro caso, a operação implícita na expressão é a adição, uma vez que a preposição *com* “indica relações de comparação, semelhança, **união**, companhia, causa, etc.” (FERREIRA, 1993, p.130 - grifo nosso). No segundo caso, a operação de multiplicação está explícita na fala. Há equívoco em ambas as falas, quando utilizam “mais” para designar o sinal de positivo (+), sendo que o símbolo “mais” indica a operação de adição, o que, conforme vimos, é um obstáculo quando os alunos operam no campo relativo.

O Professor 3 relata que “negativo *vezes* negativo é positivo”. Neste caso, apesar da linguagem ser adequada, a elaboração conceitual não ocorre devido ao método de ensino se fundamentar em uma regra mecânica.

O mesmo professor discorre sobre as regras de sinais: “Eu friso muito com eles a multiplicação, jogo de sinal vai haver apenas quando multiplica, quando divide, e quando elimina dos parênteses e mostro pra eles o porquê” e ainda: “Friso toda hora, estou sempre falando, porque se não eles vão misturar. Sempre que alguém confunde eu faço toda a explicação”. Entretanto, Vigotski (2001, p.68) afirma que a “memorização de palavras e a sua associação com os objetos não leva, por si só, à formação de conceitos”.

Consequentemente, as dificuldades estão associadas ao próprio método de ensino, centrado na linguagem mecânica, carente de significações teóricas:

> a dificuldade maior deles são as regras de sinais. Porque eles confundem muito, a regra de sinais da adição e subtração com a de multiplicação e divisão. Eles conseguem aplicar normalmente e sem muita dificuldade as regras da multiplicação e da divisão dos números inteiros, agora, quando a gente volta pra trabalhar adição e subtração eles confundem muito eles acabam usando regrinhas lá da multiplicação e divisão na adição e subtração (PROFESSOR 1).

A fala indica a fragilidade do ensino baseado em regras, inadequado para a elaboração conceitual das operações fundamentais com os números relativos. Os professores cada vez mais buscam alternativas para minimizar as dificuldades de seus alunos. No entanto, estas alternativas são decorrentes de concepções de ensino de bases teóricas contraditórias e não podem configurar como forma adequada do trabalho pedagógico em sala de aula. Um exemplo disso é a utilização de material concreto palpável no ensino da multiplicação de números relativos, conforme a fala:

> consigo fazer a multiplicação com as tampinhas assim: duas vezes cinco positivo, que é dois positivo mais dois positivo, então eu peço pra eles colocarem em cima da mesa, duas vezes o cinco positivo, então vão colocar cinco tampinhas viradas pra baixo, aquela mesma posição (pro positivo) que vai dar quanto? Dez. Quando chega no duas vezes cinco negativo, também é fácil, vai dar dez negativo. E se for fazer o cinco negativo vezes o dois, eu trabalho que se alterar os produtos o resultado é igual. Agora menos dois vezes menos cinco, já mando decorar a regra, porque eu não sei o que fazer (PROFESSOR 3).

O uso de material concreto palpável não garante a aprendizagem dos conceitos matemáticos, pois “a formação de conceitos não segue o modelo de uma cadeia associativa, em que um elo faz surgir o seguinte; trata-se de um processo orientado para um objetivo, uma série de operações que servem de passos em direção a um objetivo final” (VIGOTSKI, 1998, p.68).

Para compreendermos como a multiplicação se apresenta no campo numérico dos números relativos, é necessário que ela seja entendida no campo dos números reais. Só neste campo numérico é que todas as propriedades dos números se integram e que é possível compreender as relações existentes na multiplicação, para assim defini-la em um campo numérico específico.

As operações são realizadas com números relativos e não com quantidades relativas. O que significa, conforme vimos, que os professores relacionam os números relativos às situações cotidianas: temperaturas, altitudes, débitos, créditos, entre outros.

Porém, a operação de multiplicação de números negativos é generalizada por números abstratos. É necessário nos distanciarmos da ideia utilitária de número enquanto quantidade para conseguirmos compreender a multiplicação, bem como as demais operações numéricas.

Encontramos em Berlinghoff e Gouvêa (2010, p.99), um exemplo desse distanciamento. Os autores citam Leonard Euler (1707-1783) em *Elements of Algebra*, publicado em 1770, que diz:

> Como os números negativos podem ser considerados como débitos, já que os números positivos representam posses reais, podemos dizer que os números negativos são menos do que nada. Assim, quando um homem não tem nada seu e deve 50 coroas, é certo que ele tem 50 coroas menos do que nada; pois se qualquer um lhe desse um presente de 50 coroas para pagar o seu débito, ele estaria no ponto nada, embora estivesse realmente mais rico do que antes.

Conforme os autores, Euler demonstra desconforto ao tratar de números negativos, relembrando que nesta época grandes matemáticos ainda não aceitavam facilmente o uso e o manejo de números negativos. Porém, quando Euler precisou explicar que a multiplicação de dois números negativos tem como resposta um produto positivo, abandonou a interpretação antes adotada de números negativos como débitos “e argumentou de uma maneira formal, dizendo que *–a* vezes *–b* deveria ser o oposto de *a* vezes *–b*” (BERLINGHOTT; GOUVÊA, 2010, p.99). Desse argumento, conforme Glaeser (1981, p. 16), veio a justificativa de que como o produto de (-a) x (b) já era igual a -ab, então (-a) x (-b) só poderia ser +ab.

Também Glaeser (1985, p.36), ao apresentar um depoimento do matemático Henri (1783-1842), colabora com a ideia do distanciamento do número de quantidades para que se possa operar livremente com eles. O que Henri não compreendia é: “Multiplicando-se 10.000 francos de dívida por 500 francos de dívida, como esse homem possuirá, ou conseguirá obter, uma fortuna de 5.000.000?”. Esse tipo de dificuldade aparece quando relacionamos os números diretamente com situações reais, ou seja, ao conhecimento empírico.

Para “facilitar” a regra da multiplicação de números relativos, o Professor 3 apresenta uma brincadeira:

> Aquele jogo de sinal, aquela brincadeira do amigo, eu faço. Conhece? Assim, amigo é positivo, o inimigo é negativo, o amigo do meu amigo é meu amigo. O amigo do meu inimigo é meu inimigo, o inimigo do meu amigo é meu inimigo, o inimigo do meu inimigo é meu amigo. Eu faço isso que é mais uma descontração assim. É regra. Pra dar uma descontraída (PROFESSOR 3).

Essa é mais uma regra a ser memorizada, com o agravante de que se distancia do sentido operatório por se tratar de uma situação que não tem conexão numérica alguma.

O ensino do Professor 4 se diferencia dos demais:

> tem uma aqui que eu gosto muito que a gente coloca o oposto do número. Tipo: menos seis vezes menos dois. Eu coloco o oposto do menos seis e multiplico pelo segundo termo aqui, que é o menos dois. Multiplico seis vezes menos dois que vai dar menos doze, eu coloco o oposto do menos doze. E aí vai resultar um número positivo. Então eu passo sempre essa observação pra eles. Vocês colocam o oposto do primeiro e depois o oposto da resposta. Aí fecha positivo (PROFESSOR 4).

O professor novamente utiliza uma regra. Pela definição da operação de multiplicação, percebemos que -a . (+b), o fator –a (multiplicando), aparecerá tantas vezes quantas o fator +b (multiplicador) indicar. No caso da operação +a . (-b), não concebível que +a se repita por –b vezes. No entanto, basta usarmos a propriedade comutativa para que a operação seja resolvida: +a . (-b) = -b . (+a), em que certamente –b se repete tantas vezes quanto +a indicar.

No caso da operação possuir dois fatores negativos, é necessário que se adote outro procedimento para o cálculo, porque conforme define Caraça (1984), o multiplicador precisa ser um número maior do que um positivo.

O sinal negativo de um número indica que ele é o oposto a um número no sentido positivo, uma vez que os números podem ser tomados em dois sentidos distintos. Assim, o sinal negativo na frente de um número positivo significa que o sentido do número é o oposto, ou seja, negativo. Da mesma forma, um sinal negativo na frente de um número negativo, indica que o sentido do número será positivo. Temos:

-a . (-b) = - (-a) . b = o oposto de –a é +a, que se repete b vezes.

Portanto, o produto de dois números negativos, será positivo. A compreensão desse resultado foi diferente ao longo da história. Glaeser (1981, p.37), relata que geralmente a origem da regra dos sinais é atribuída a Diofantes de Alexandria (fim do século III d.C), que apesar de não citar os números negativos em seus escritos, apresenta a seguinte afirmação no início do Livro I da sua Aritmética: "O que está *em falta* multiplicado pelo que está em falta dá o que é positivo; enquanto que o que está *em falta* multiplicado pelo que é positivo, dá o que está *em falta*".

Stevin (1634 apud GLAESER, 1981, p.38) apresenta as demonstrações a seguir:

Demonstração aritmética: Da multiplicação de (8 - 5) por (9 – 7), aplica a propriedade distributiva para obter os produtos: 8 . 9 = 72, 8 . (-7) = -56, -5 . 9 = -45 e ainda -5 . (-7) = +35 (pelo teorema anterior). Fazendo a soma algébrica dos resultados 72 + (-56) + (-45) + (+35) = 6. Como o resultado de 8 – 5 é igual a 3 e de 9 – 7 é igual a 2, multiplicando as duas diferenças, dois vezes 3, encontra-se o resultado 6. Portanto, o teorema é verdadeiro.

Demonstração geométrica por meio da ilustração 15:

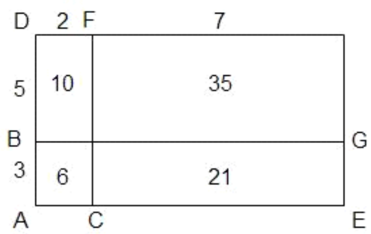


Ilustração 15
Fonte: Georges Glaeser (1991, p.38)

> Seja AB 8 - 5 (a saber AD 8 - DB 5). Depois AC 9 - 7 (a saber AE 9 - BC 7), seu produto será CB; ou ainda de acordo com a multiplicação precedente ED 72 - EF 56 - DG 45 + GF 35, os quais nos mostrarão serem iguais a CB desse modo. Em suma, ED + GF, subtraído de EF e DG, resta CB. Conclusão: Portanto, mais multiplicado por mais, dá produto mais. E menos muitiplicado por menos, dá produto mais, e mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos; como queríamos demonstrar (GLAESER, 1981, p.38).

A demonstração aritmética é feita por meio de exemplo numérico, não possui alcance geral, “Mas a demonstração geométrica pode servir de base a um desenvolvimento geral de (a-b) x (c-d) = ac - ad - bc + bd” (GLAESER, 1981, p.39).

D’Augustine (1976, p.267), por meio da propriedade distributiva da multiplicação, relativa à subtração, também demonstra aritmeticamente o produto positivo de dois números negativos:

$^{-}6 \text{ x } {}^{-}3 = {}^{-}6 \text{ x } ({}^{+}1 - {}^{+}4)$
$^{-}6 \text{ x } ({}^{+}1 - {}^{+}4) = ({}^{-}6 \text{ x } {}^{+}1) - ({}^{-}6 \text{ x } {}^{+}4)$
$({}^{-}6 \text{ x } {}^{+}1) - ({}^{-}6 \text{ x } {}^{+}4) = {}^{-}6 - {}^{-}24$
$^{-}6 - {}^{-}24 = {}^{-}6 + {}^{+}24 = {}^{+}18$

Caraça (1984, p.95) demonstra algebricamente a multiplicação de números negativos por meio da propriedade distributiva da multiplicação:

$$(p - q) . (r - s) = p. (r - s) - q . (r - s) = pr - ps - (qr - qs)$$
$$= pr - ps - qr + qs = pr + qs - ps - qr$$
$$= (pr + qs) - (ps + pr)$$

Em seguida, o autor acrescenta as particularidades, que segundo ele são as igualdades que contêm "a conhecida *regra dos sinais*"[25] (grifos do autor):

$(+a) . (+b) = (a - 0) . (b - 0) = +a.b,$

$(+a) . (-b) = (a - 0) . (0 - b) = -a.b,$

$(-a) . (+b) = (0 - a) . (b - 0) = -a.b,$

$(-a) . (-b) = (0 - a) . (0 - b) = +a.b.$

A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração é apresentada por Moretti (2012). Parte-se da hipótese de que a multiplicação de números negativos terá como resultado duas possibilidades: positivo ou negativo. Acompanhe as tabelas 3 e 4:

Regra Usual	**Regra Dois**
+ X + = +	+ X + = +
+ X − = −	+ X − = −
− X + = −	− X + = −
− X − = +	− X − = −

Tabela 3
Fonte: Moretti (2012)

As regras da tabela 3 são aplicadas concomitantemente para a expressão: (1–3)x(–5+1) conforme a tabela 4:

[25] Idem, p.96.

(1 – 3) x (–5 + 1)	Regra Usual	Regra Dois
Eliminando ambos os parênteses	–2 x –4 = +8	–2 x –4 = –8
Eliminando o parêntese à esquerda e usando a distributividade	–2 x (–5 + 1) = –2 x –5 –2 x (+1) = 10 – 2 = +8	–2 x (–5 + 1) = –2 x –5 –2 x (+1) = –10 – 2 = –12
Eliminando o parêntese à direita e usando a distributividade	(1 – 3) x –4 = 1 x –4 – 3 x (– 4) = –4 + 12 = +8	(1 – 3) x –4 = 1 x –4 – 3 x (– 4) = –4 – 12 = –16

Tabela 4
Fonte: Moretti (2012)

Portanto, para garantir que as distributividades à direita e à esquerda sejam válidas, é necessário que seja utilizada a regra usual de operação, em que o produto de dois número negativos é positivo.

Outro anúncio da regra de sinais aparece no Tratado de Álgebra (1748 apud GLAESER, 1991, p.42-43):

> Poder-se-ia deduzir daí a regra dos sinais tal como se costuma enunciá-la, ou seja, que *os sinais iguais nos termos do multiplicador e do multiplicando dão + no produto, e os sinais diferentes dão -.* Evitamos esta maneira de apresentar a regra, para poupar aos iniciantes a revoltante expressão - por - dá +, que, todavia, é uma consequência necessária da regra. Pode-se, como fizemos, disfarçá-la, mas não anulá-la, nem contradizê-la; o leitor, sem perceber, observou todo o seu sentido nos exemplos precedentes. Familiarizado com a coisa, como iria perturbar-se com as palavras? Se ainda conserva alguma dúvida, que preste atenção à seguinte demonstração, que ataca diretamente a dificuldade. +*a* - *a* = 0; assim, multiplicando +a por qualquer quantidade, o produto deve ser 0; se multiplico por *n*, terei como primeiro termo +*na*, portanto o segundo será -*na*, pois é preciso que os dois termos se destruam. Logo sinais diferentes dão - no produto. Se multiplico +*a* - *a* por - *n*, de acordo com o caso precedente, obterei -*na* como primeiro termo; logo terei +*na* como segundo, pois é sempre necessário que os dois termos se destruam. Logo - multiplicado por - dá + no produto.

O texto, segundo o autor, aborda formalmente a demonstração da regra dos sinais, utilizando implicitamente a distributividade em relação à adição.

Em conformidade com Imenes e Lellis (2009), apresentaremos na sequência a multiplicação de números relativos envolvendo forças e vetores. Vale o alerta de que mencionamos esta operação entre grandezas escalares, porém as forças são grandezas vetoriais.

Diferentemente de tempo, comprimento, massa, que são grandezas escalares, as grandezas vetoriais se caracterizam por três componentes: intensidade, direção e sentido. As grandezas escalares são caracterizadas por um número (quantidade) associado a uma unidade de medida (SELHORST, 2007). Ramalho (1976) apresenta como grandezas vetoriais o deslocamento, a velocidade, entre outras. Selhorst (2007) cita como exemplo a força.

Matematicamente, as grandezas vetoriais e, portanto, as forças, são representadas por vetores, por meio de segmentos de reta orientados. As características de um vetor são destacadas na ilustração:

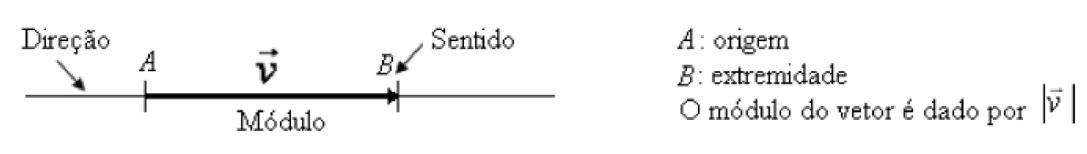


Ilustração 16
Fonte: Selhorst (2007, p. 28)

Portanto, “vetor é o ente matemático caracterizado pelo que há de comum ao conjunto dos segmentos orientados [...]: o mesmo comprimento, direção e sentido” (RAMALHO, 1976, p.129).

O autor define o componente direção como “o que há de comum num feixe de retas paralelas. Duas ou mais retas paralelas têm a mesma direção. Ter a mesma direção é ser paralelo a...”[26]. E adverte que o sentido em uma trajetória, pode acontecer da direita para a esquerda e da esquerda para a direita (existem dois sentidos possíveis): “A um dos sentidos possíveis associamos sinal positivo (+)”[27]. Neste caso, fica subentendido que ao sentido contrário, ou oposto, o sinal associado será o negativo (-).

Quando invertemos o sentido de um vetor, encontramos o vetor oposto, conforme mostra a ilustração 17:

[26] Idem, p.128.
[27] Idem, p.128.

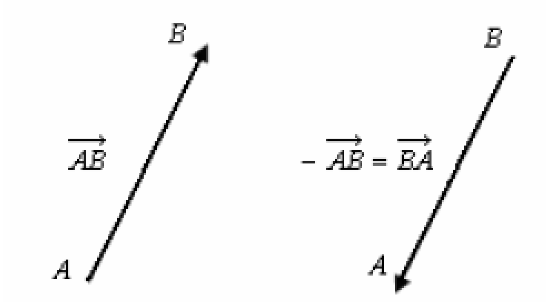


Ilustração 17
Fonte: Selhorst (2007, p. 28)

Segundo Selhorst (2007), podemos multiplicar um vetor por um número real, mantendo a mesma direção do vetor original. Porém, dependendo do número real, o sentido e o módulo do vetor resultante se alteraram. O novo vetor poderá aumentar ou diminuir a sua intensidade (desde que multiplicado por um número real diferente de um) e também poderá mudar o seu sentido (desde que o número real seja negativo). Eis alguns exemplos, tomando como vetor original $\vec{a}$:

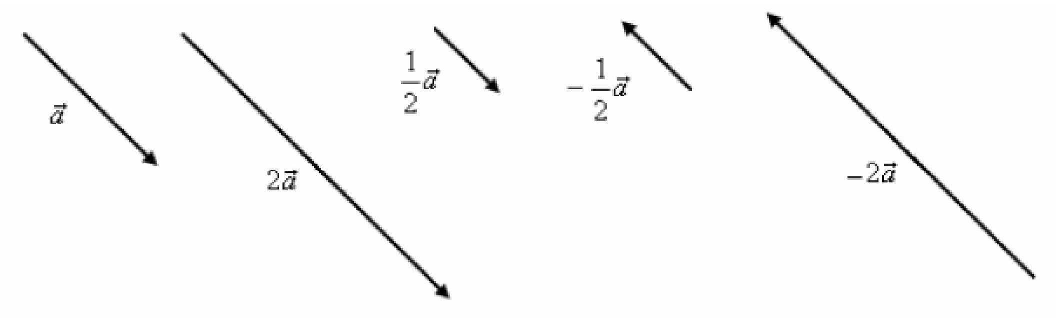


Ilustração 18
Fonte: Selhorst (2007, p. 32)

Imenes & Lellis (2009) desenvolvem o conceito de multiplicação de números relativos por meio do estudo de forças e vetores. Tais autores esclarecem que a multiplicação de um vetor qualquer por -1 (um negativo) resultará no vetor simétrico. Uma multiplicação por -2,5, por exemplo, resultaria em um vetor de sentido oposto com duas vezes e meia a intensidade do vetor original.

Na sequência, os autores mostram multiplicações sucessivas em que o vetor sofre modificações em sua intensidade e sentido, conforme os multiplicadores, mantendo a direção horizontal:

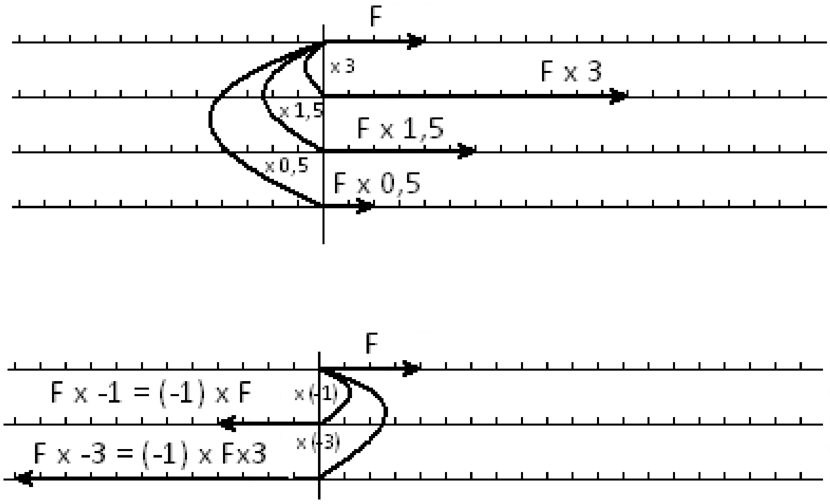


Ilustração 19
Fonte: elaboração nossa, com base em Imenes e Lellis (2009)

Com base nos cálculos de multiplicação de números reais por vetores, é possível esquematizá-los na reta numérica, em que há troca de sentido quando multiplicados por números negativos, conforme será apresentado na sequência.

Madeira (2012) apresenta o conceito de multiplicação com base nas proposições de Davidov (1982). As atividades realizadas com os alunos partem da relação entre grandezas, por meio do uso de unidades de medida. A introdução do conceito de multiplicação ocorre por meio de esquemas associados à reta numérica. O leitor poderá buscar nos estudos de Madeira (2012), caso tenha necessidade de maior aprofundamento.

A ilustração 20 representa a síntese das elaborações de Madeira (2012) para a operação de multiplicação. O esquema indica os cartões A, B e C. Estes cartões são comparados entre si e os registros indicam que o cartão A cabe três vezes em C e que o cartão C cabe quatro vezes no cartão B.

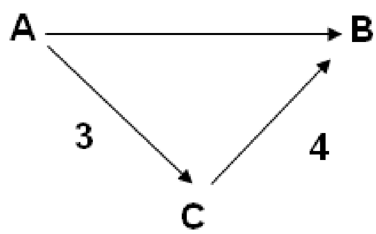


Ilustração 20
Fonte: elaboração nossa, com base em Madeira (2012)

No esquema, a medida A representa a unidade básica, da qual parte a medição. A autora informa que a medida auxiliar C que foi utilizada para facilitar a medição, chama-se medida intermediária. Apresentam-se as representações algébricas, em que B=4C e C=3A Assim, B=4.3A, B=12.A. A medida básica é A, de acordo com Madeira (2012) vale uma unidade, portanto B=12.1, B=12. Desta forma, completa-se o esquema:

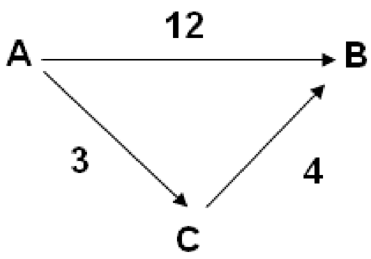


Ilustração 21
Fonte: elaboração nossa, com base em Madeira (2012)

As noções de unidade básica e unidade intermediária são trabalhadas pela autora na continuidade das atividades, por meio da comparação entre volumes, quantidades de objetos, entre outras. A seguir são apresentadas por esquemas na reta numérica, em que partindo do zero, registram-se os agrupamentos de unidades intermediárias, tantas vezes quanto se repetem. No exemplo, a unidade intermediária C possui três unidades básicas A, ou seja, os agrupamentos são de 3 em 3 unidades. Como a medida C coube 4 vezes na medida B, os agrupamentos de três em três se repetirão por quatro vezes. Assim, chega-se ao resultado 12, que é o total de unidades básicas A contidas em B, já evidenciado por meio do cálculo algébrico e aritmético antes realizado:

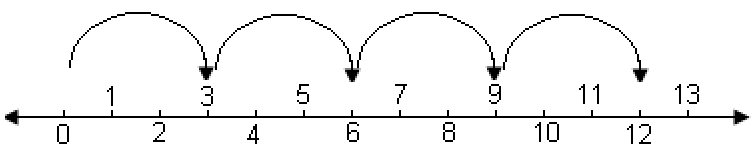


Ilustração 22
Fonte: elaboração nossa, com base em Madeira (2012)

Nesta situação, temos 3 vezes 4 que é igual a 12 (3.4 = 12), e no esquema a seguir, tomamos como medida intermediária -3 que se repete por 4 vezes, ou seja, a multiplicação (-3).4= ?

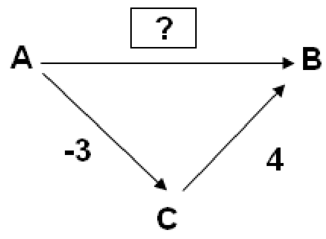


Ilustração 23
Fonte: elaboração nossa, com base em Madeira (2012)

Representando o esquema na reta numérica, temos:

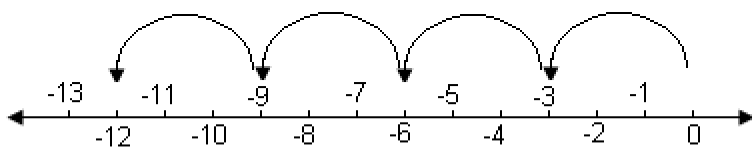


Ilustração 24
Fonte: elaboração nossa, com base em Madeira (2012)

Encontrando o resultado -12:

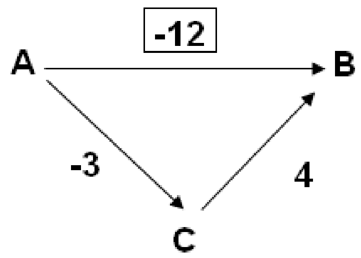


Ilustração 25
Fonte: elaboração nossa, com base em Madeira (2012)

Com base no último esquema, temos que -3 é o multiplicando (o número que se repete). 4 é o multiplicador. Ambos são os fatores da multiplicação. E -12 é o produto.

Conforme Caraça (1984), para a operação de multiplicação, o multiplicador não pode ser um número menor do que 1. Neste caso, quando temos a multiplicação 4.(-3), pela propriedade comutativa poderemos apresentá-la da seguinte forma: (-3).4, mantendo o multiplicador maior do que um.

Caso a multiplicação tenha dois fatores negativos, como em -4.(-3), precisaremos adotar outro procedimento para garantir que a definição da multiplicação seja mantida e que o cálculo seja resolvido.

O fator -4 pode ser representado pela multiplicação -1 x 4. O um negativo passa a exercer outro papel. Assim como nas operações com vetores, onde a multiplicação por um negativo altera somente o sentido do vetor, no ensino da multiplicação na reta numérica, consideraremos que ele troca o sentido do deslocamento.

Para Hoffmann (apud SCHUBRING, 2007, p.14) a multiplicação por -1 tem um sentido bem simples: “pôr o multiplicando na qualidade oposta [...] contar desde zero no lado negativo”. No caso de multiplicações de dois números negativos procederemos da seguinte maneira:

-4.(-3) => -4.(-1).3=

-1.(-4).3= (propriedade comutativa)

4.3= (multiplicando no sentido oposto, -4 para +4)

12 (resultado da multiplicação, em que quatro é tomado três vezes)

Conforme apresenta Caraça (1984), a operação de divisão é inversa à de multiplicação. Conhecendo o produto e um de seus fatores, podemos determinar o outro fator. Apesar dos termos conhecidos (fatores e produto) serem relacionados à multiplicação, o produto já é conhecido, resta-nos encontrar o outro fator por meio da operação matemática conhecida como **divisão** (CARAÇA, 1984).

Na fala dos professores é dada ênfase à operação de multiplicação, em detrimento da divisão. Acreditamos que isso ocorra por compreenderem que a divisão é a operação inversa à multiplicação (CARAÇA, 1984), como aparece na fala abaixo:

> E na divisão, por que ele *(o quociente)* dá positivo? Porque ela é o inverso da multiplicação. Tipo assim, é menos dez dividido por menos dois, vai dar mais cinco. Por quê? Porque como a divisão é inversa da multiplicação, se eu fizer cinco vezes menos dois, vai dar menos dez, então, nós voltamos para o início (PROFESSOR 4 – grifo nosso).

Por se tratarem de operações inversas, vale para a operação de divisão “uma regra dos sinais semelhante à da multiplicação” (CARAÇA, 1984, p.96). Ou seja, as mesmas regras consideradas para a operação de multiplicação se estendem à operação de divisão (PROFESSOR 2, PROFESSOR 3).

A própria referência amplamente utilizada neste trabalho monográfico (SCHUBRING, 2000, 2002 e 2007. GLAESER, 1985. BERLINGHOFF; GOUVÊA,

2010. MÉRICLES, 2012. CARAÇA, 1984. D'AUGUSTINE, 1976, entre outros), evidencia a operação de multiplicação de números relativos:

> Ficando estabelecida a multiplicação de números inteiros, será simples para o professor definir a divisão como a operação inversa da multiplicação e começar a estabelecer as regras dos sinais para a divisão. Por exemplo, ${}^{+}8 \div {}^{-}2 = {}^{-}4$, porque ${}^{-}4 \text{x} {}^{-}2 = {}^{+}8$ (D'AUGUSTINE, 1976, p.268).

De acordo com Caraça (1984), a operação de divisão pode ser representada por diferentes símbolos: a : b ou $\frac{a}{b}$. E por ser a inversa da operação de multiplicação, temos:

$$a : b = c \quad \Leftarrow \quad b \,.\, c = a, \text{ com } b \neq 0.$$

Em que "Ao número *a* chama-se dividendo; ao número *b*, divisor; ao número *c*, quociente; a divisão é, portanto, a operação pela qual, dados o dividendo e o divisor, se determina um terceiro número, quociente, que multiplicado pelo divisor, dá o dividendo" (CARAÇA, 1984, p. 22).

Novamente é perceptível na fala de um dos professores entrevistados, a preocupação em estabelecer significado à operação com números relativos, mais precisamente a divisão:

> Fazer a divisão é fácil porque doze negativos, vamos dividir em três partes, o que ficou em cada parte? Ficaram quatro negativos. Doze positivos divididos em três partes iguais ficaram quatro positivos. Agora quando vem pros negativos ali eu não sei. [...] É isso que acontece, uso a regra de novo (PROFESSOR 3).

Porém, a operação de divisão é assim definida:

$$(1)\ b \,.\, c = a \qquad \text{então} \qquad (2)\ a : b = c$$

Considerando que o produto de dois números negativos e de dois números positivos é positivo e que o produto de um número positivo e outro negativo é negativo, temos: b = -k; c = -m; a = +p.

Fazendo a substituição dos valores de a, b, c em (1) e em seguida em (2), temos:

$$-k \,.\, -m = +p$$

(número negativo multiplicado por número negativo resulta em número positivo)

$$+p : -k = -m$$

(número positivo dividido por número negativo resulta em número negativo)

Alterando os valores de a, b, c para -p, -k, +m, respectivamente e substituindo novamente em (1) e (2), temos:

$$-k \,.\, +m = -p$$

(número negativo multiplicado por número positivo resulta em número negativo)

$$-p : -k = +m$$

(número negativo dividido por número negativo resulta em número positivo)

Ficam estabelecidas, portanto, as regras usuais para a operação de divisão, conforme as regras para a operação de multiplicação.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao eleger como objeto de investigação o estudo das operações fundamentais da Matemática no conjunto dos números relativos, tínhamos a pretensão de analisar as produções pedagógicas de quatro professores da Rede Municipal de Ensino de Criciúma, à luz da Teoria Histórico-Cultural.

A análise de conteúdo foi a metodologia utilizada na investigação. Tal metodologia possibilitou que fossem elencadas categorias para o processo de análise: “Situações do Cotidiano e Materiais Manipuláveis”; “A Reta Numérica”; e “Operações com Números Relativos”. Para analisar a prática dos professores em relação ao ensino das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, fez-se necessária a análise de cada uma das categorias elencadas, de acordo com a unidade de contexto *elaboração conceitual* e com as unidades de análise *metodologia de ensino* e *prática pedagógica*. Para nortear o estudo, definiu-se como problema de pesquisa: *quais as limitações das produções pedagógicas de professores de matemática no ensino das operações com números relativos no sétimo ano do Ensino Fundamental?*

O ensino do conjunto dos números relativos pelos professores entrevistados, mais especificamente dos números negativos, geralmente ocorre associado a situações reais de aplicação, tais como: temperaturas, saldo de gols, altitude, dívidas. Ao considerarem os números negativos enquanto quantidades discretas, relacionados diretamente ao conhecimento empírico, distanciam-se da ideia de número real.

Com o intuito de melhorar a aprendizagem dos alunos, os professores desta investigação procuram conciliar diferentes práticas pedagógicas, com fundamentos teóricos contraditórios. Vale salientar que o principal referencial teórico dos professores são os livros didáticos brasileiros. A reta numérica, por exemplo, é utilizada mecanicamente como instrumento pedagógico manipulativo no ensino dos números relativos. A ênfase na elaboração dos conceitos matemáticos mais uma vez é dada ao teor empírico.

Consideramos assim, que a maior limitação nas produções pedagógicas dos professores está na fragilidade do conhecimento empírico atribuída ao uso de materiais concretos manipuláveis e a situações reais de aplicação.

A linguagem carente de significações conceituais, também se apresenta como limitação no ensino das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Por exemplo, a fala: “menos com menos dá mais”, significa para o professor a operação de multiplicação entre dois números negativos, cujo resultado é um número positivo. No entanto, não está explícita a operação (multiplicação) e a qualidade (positivo e negativo) dos números na situação-problema. Inferimos que algumas dificuldades na compreensão das operações matemáticas no campo dos números relativos se dão pela confusão semântica e conceitual que se expressa também na linguagem.

Segundo os pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, o ensino das significações conceituais dos números relativos e das operações matemáticas fundamentais deve privilegiar o pensamento teórico. A proposição é que o número real, enquanto resultado da comparação entre grandezas, permeie a elaboração do conceito de número relativo, ao se considerar as quantidades contínuas. Segundo Rosa (2012), é na reta numérica que se objetiva o conceito de número real geometricamente, algebricamente e aritmeticamente. Tal representação concebe o zero origem, que indica a infinidade de números à sua direita (positivos) e à sua esquerda (negativos).

A investigação possibilitou novo posicionamento em sala de aula, por parte da pesquisadora, quanto à sua prática pedagógica. Contudo, pretende-se dar continuidade a este estudo com foco nas implicações da linguagem na formação de conceitos matemáticos.

REFERÊNCIAS

AMORIM, Marlene Pires. **Apropriação de significações do conceito de números racionais:** um enfoque histórico-cultural. 2007. 154 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma.

AUGUSTINE, Charles H. d'. **Métodos modernos para o ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1976.

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo.** Lisboa: Edições 70, 1995. 225 p.

BATTTIST, Isabel Koltermann; NEHRING, Catia Maria. Linguagem como ferramenta básica no processo de elaboração conceitual em aulas de matemática. In: GRANDO, Neiva Ignês (Org.). **Educação Matemática:** processo de pesquisa no ensino fundamental e médio. Passo Fundo, RS: Universidade de Passo Fundo, 2009, p.52-70.

BERLINGHOFF, William P., GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos:** um guia fácil e prático para professores e entusiastas. 2ª ed. São Paulo: Blucher, 2010. p. 95-100.

BONJORNO, José Roberto et al. **Matemática:** fazendo a diferença: 7º ano do Ensino Fundamental. 1. ed. São Paulo: FTD, 2006.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática.** 1.ed. Lisboa: Sá da Costa, 1984. 318 p.

CARDOSO, Eloir Fátima Mondardo. **Números inteiros relativos, em situação de ensino.** 1996. 57f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Fundação Educacional de Criciúma, Criciúma.

______. **A prática pedagógica:** percepções de professores de matemática e dirigentes da educação. 2007. 129 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma.

CATANEO, Vanessa Isabel. **A multiplicação de números relativos numa perspectiva histórico cultural**. 2009. 76 f. TCC (Graduação em Matemática) – Centro Universitário Barriga Verde, Orleans.

COSTA, J.M.C. Da. **Tratado de arithmetica**. Lisboa: Imprensa Nacional, 1866.

CRICIÚMA, Secretaria Municipal de Educação. **Proposta Curricular da Rede Municipal de Criciúma:** currículo para a diversidade: sentidos e práticas. Criciúma: Secretaria Municipal de Educação, 2008.

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática**: 7º ano do Ensino Fundamental. São Paulo: Ática, 2009.

DUARTE, Newton. **Educação escolar, teoria do cotidiano e a escola de Vigotski**. 4. ed.Campinas, SP: Autores Associados, 2007.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Campinas, SP: UNICAMP, 2004.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Dicionário básico da língua portuguesa.** Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1993.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

FRANCO, Maria Laura P. Barbosa. **Análise de conteúdo.** 3. ed. Brasília: Liber Livro, 2008. 79 p.

GIARDINETTO, José Roberto Boettger. **Matemática escolar e matemática da vida cotidiana**. Campinas, SP: Autores Associados, 1999.

GIOVANNI Jr, José Ruy ; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da Matemática**: 7º ano do Ensino Fundamental. Ed. renovada. São Paulo: FTD, 2009.

GLAESER, G. Epistemologia dos números negativos. **Boletim do GEPEM**, n. 17. Rio de Janeiro, 1985, p. 29-124. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=search&op=authors&path%5B%5D=view&firstName=Georges&middleName=&lastName=Glaeser&affiliation=Universidade%20Louis%20Pasteur%2C%20Estrasburgo&country=> . Acesso em 10 dez. 2012.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática:** Imenes & Lellis: 7º ano do Ensino Fundamental. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.

______. **Matemática para todos:** 6ª série, 3º ciclo. São Paulo: Scipione, 2002.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andreade. Métodos científicos. In: ______. **Fundamentos de metodologia científica**. São Paulo: Ed. Atlas, 1986.

MADEIRA, Silvana Citadin. **"Prática":** uma leitura histórico-crítica e proposições davydovianas para o conceito de multiplicação. 2012. 164 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma.

MEDEIROS, Alexandre; MEDEIROS, Cleide Farias de. Números Negativos: Uma História de Incertezas. **Bolema**, Rio Claro, v. 7, n. 8, 1992. Disponível em: <http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:oTWrdkqgCBEJ:alexandremedeirosfisicaastronomia.blogspot.com/2011/10/numeros-negativos-uma-historia-de.html+&cd=1&hl=pt-PT&ct=clnk&gl=br>. Acesso em 15 nov. 2012.

MINAYO, Maria Cecilia de Souza. A entrevista enquanto técnica. In: ______. **Pesquisa social:** teoria, método e criatividade. 16. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2000.

MORAES, Roque. Análise de Conteúdo. In: **Revista Educação**: Epistemologia e ciências da educação família e educação, ano XXII, nº 37, 1999.

MORETTI, Méricles T. A Regra dos Sinais para a Multiplicação: ponto de encontro com a noção de congruência semântica e o princípio de extensão em matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 42B, p. 691-714, abr. 2012. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5783/4410>>. Acesso em 10 jan. 2013.

RAMALHO JÚNIOR, Francisco. **Os fundamentos da física.** São Paulo: Ed. Moderna, 1976.

ROSA, Josélia Euzébio da. **Proposições de Davydovy para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar:** inter-relações dos sistemas de significações numéricas. 2012. 244 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

SÁ, Pedro Franco de; ANJOS, Luis Jorge Souza dos. Números Negativos: Uma trajetória Histórica. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, IX., 2011, Aracajú. **Anais...** Aracajú.

SAVIANI, Dermeval. **Pedagogia histórico-crítica:** primeiras aproximações. 10. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2008.

SCHUBRING, Gert. Rupturas no Estatuto matemático dos números negativos. **GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 37, ago. 2000. Disponível em <http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=article&op=view&path%5B%5D=1179&path%5B%5D=747 > . Acesso em 10 jan. 2013.

_______. Rupturas no Estatuto matemático dos números negativos (parte 2). **GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 38, fev. 2001. Disponível em <http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=article&op=view&path%5B%5D=1162&path%5B%5D=736> . Acesso em 18 jan. 2013.

_______. Um Outro Caso de Obstáculos Epistemológicos: o princípio da permanência. **Bolema**, Rio Claro, v. 20, n. 28, p. 1-20, 2007. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1527/1308 >. Acesso em 10 jan. 2013.

SELHORST, Mário. Vetores. In: **Geometria Analítica** – Engenharia Química/Química Industrial. Tubarão, 2007.

SOUZA, Joamir Roberto de; PATARO, Patrícia Rosana Moreno. **Vontade de saber Matemática:** 7º ano do Ensino Fundamental. 1. ed. São Paulo: FTD, 2009.

STRUIK, Dirk Jan. **História concisa das matemáticas.** Lisboa: Gradina, 1989. 360 p.

TRIVINOS, Augusto Nibaldo Silva. **Introdução à pesquisa em ciências sociais:** a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Ed. Atlas, 1987. 175 p.

VIGOTSKY, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem.** São Paulo: Martins Fontes, 2001. 496 p.

APÊNDICE

APÊNDICE A – ROTEIRO DE ENTREVISTA

UNIVERSIDADE DO EXTREMO SUL CATARINENSE - UNESC
PÓS-GRADUAÇÃO LATO SENSU *EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*

ROTEIRO DA ENTREVISTA

1. INFORMAÇÕES PESSOAIS

1.1. Qual o seu nome?

1.2. Quantos anos você tem?

1.3. Qual a sua formação acadêmica?

2. INFORMAÇÕES PROFISSIONAIS

2.1. Há quanto tempo você atua no magistério? Em quais redes de ensino?

2.2. Quais as suas turmas de atuação?

3. INFORMAÇÕES SOBRE O SISTEMA CONCEITUAL DOS NÚMEROS RELATIVOS

3.1. O que vem primeiro à sua mente quando se fala em números negativos? (em relação a: aprendizagem, conceitos, dificuldades, etc.)

3.2. Qual sua opinião sobre o ensino dos conjuntos numéricos na perspectiva da maioria dos livros didáticos, ou seja, na ordem: naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais?

3.3. Qual a metodologia e recursos que você utiliza para iniciar a elaboração do conteúdo dos números negativos/relativos/inteiros?

3.4. O que você considera essencial ao preparar as aulas?

3.5. Qual/quais sua/s maior/es dificuldades referente/s ao ensino deste conjunto numérico?

3.6. Qual/quais a/s maior/es dificuldade/s dos alunos, com relação a aprendizagem deste conceito matemático? O que você costuma fazer para sanar as dificuldades?

3.7. Você utiliza algum material manipulável na sala de aula com os alunos? De que forma?

3.8. Em relação às operações com números negativos: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, quais as maiores dificuldades no processo do teu ensino e da aprendizagem dos alunos? Por quê?

3.9. Como você ensina as operações de adição e subtração? (a linguagem que usa e a linguagem que o aluno usa). Dê um exemplo de cada operação.

3.10. Qual a explicação ou as explicações que você conhece para a multiplicação/divisão de números negativos resultar em um número positivo? Qual delas você utiliza em sala de aula com seus alunos? Dê um exemplo da operação de multiplicação e da operação de divisão.

3.11. O que você considera que deu certo no processo do ensino e de aprendizagem? Por quê?

3.12. O que você considera que deu errado no processo do ensino e de aprendizagem? Por quê?

3.13. Como você ensina a comparação de números relativos? (Número positivo com número positivo, negativo com negativo, positivo e negativo, positivos e o zero, negativos e o zero)